METODI PRATICI

PER DETERMINARE

I CONTORNI

DELLE OMBRE ORDINARIE

DI

GIOVANNI ASTOLFI

MILANO 1824

PER GIO. BATT. BIANCHI E COMP. TIPOGRAFI.

METODI PRATICI

PER DETERMINARE

I CONTORNI

DELLE OMBRE ORDINARIE

DI

GIOVANNI ASTOLFI.

MILANO 1824

PER PAOLO EMILIO GIUSTI FONDITORE-TIPOGRAFO.

Digitized by the Internet Archive
in 2025 with funding from
Getty Research Institute

https://archive.org/details/metodipraticiper00asto

AVVERTIMENTO

Questi *Metodi pratici* contengono parte delle costruzioni date dall'esimio professore Bordoni nel suo *Trattato dei contorni delle ombre ordinarie,* e precisamente quelle che s'incontrano più di frequente nello studio dell' architettura.

Essi vengono particolarmente destinati per quei giovani che intraprendono questo studio senza la scorta delle matematiche.

Coloro che, conoscendo gli elementi di geometria, amano avere una maggior estensione per mettersi in istato di disegnare i contorni delle ombre ordinarie di qualunque corpo, anche non soggetto a leggi geometriche, come sono le foglie, gli ovoli ecc., date che siano le vere loro dimensioni, devono leggere il trattato citato, ove troveranno con che soddisfare completamente questa loro brama.

DEFINIZIONI

Per rappresentare i punti, le linee, e le superficie, situate comunque nello spazio, s'immagineranno due piani fissi, l'uno orizzontale, e l'altro verticale, e posto a fronte del disegnatore. Il primo si chiamerà *piano icnografico* o *piano delle piante*, e l'altro *piano ortografico* o *piano degli alzati.*

I punti, le linee, e le superficie, poste comunque nello spazio, che si prendono a considerare, si chiameranno punti, linee e superficie *obbiettive.*

Si chiamerà *icnografia* o *pianta* di un punto obbiettivo il piede della perpendicolare calata dal medesimo sul piano icnografico; e *ortografia* o *alzato* di questo punto il piede della perpendicolare calata dallo stesso sul piano ortografico.

Così se da tutti i punti di una linea obbiettiva si tireranno le perpendicolari al piano icnografico, la linea costituita dai piedi di queste perpendicolari si chiamerà *icnografia* o *pianta* della linea considerata; e *ortografia* o *alzato* della medesima la linea nella quale saranno i piedi di tutte le perpendicolari condotte al piano ortografico dai punti della linea obbiettiva.

PROBLEMA I.

Data la pianta $ABKCDG$ (Fig. 1) e l'alzato $abcd$ di un cilindro qualunque, trovare il contorno dell'ombra propria del medesimo tanto in pianta che in alzato.

Sia LH la direzione del raggio di luce in pianta, ed Lh la direzione dello stesso raggio in alzato.

Si conduca Hh perpendicolare alla retta ML e dai punti H, h tirinsi le rette HN, hn paralelle rispettivamente ai lati AB, ab, e dal punto n, dove la hn sega la ML conducasi nN perpendicolare alla stessa ML e si estenda fino in N ad incontrare la HN; indi si unisca il punto L col punto N, mediante la retta LN, e si determini il punto G, conducendo la GE tangente la curva AGD e paralella alla LN; fatto ciò si tiri la Gg perpendicolare alla ML, e condotte le rette GF, gf paralelle rispettivamente ai lati AB, ab, saranno queste le linee del contorno dell'ombra propria cercata.

Se il cilindro sarà retto, per avere il punto G, si condurrà la GE immediatamente paralella alla direzione del raggio in pianta LH.

PROBLEMA II.

Data la pianta AGB (Fig. 2) e l'alzato acb di un cono qualunque, trovare la pianta e l'alzato del contorno dell'ombra propria del medesimo.

Siano LH Lh le direzioni del raggio di luce in pianta ed in alzato, e sia il punto C la pianta del vertice del cono.

*

Si tirino le rette CN, cn rispettivamente paralelle alle LH, Lh, e la nN perpendicolare ad ML, e dal punto N si conduca la retta NG tangente la curva AGB; indi dal punto di contatto G si tiri la retta Gg perpendicolare alla ML, e condotte le GC, gc saranno queste le linee del contorno dell'ombra cercata.

Se sarà dato un tronco di cono invece di un cono intiero, si prolungheranno i lati del tronco fino ad incontrarsi, operando in seguito come si è indicato per il cono intiero.

PROBLEMA III.

Dato il diametro maggiore AB (Fig. 3) ed il diametro minore CD di un elisse, descriverne il suo contorno.

Presa una retta FG eguale ad OB, e in essa la parte GH eguale a CO, si situi questa retta in modo che il punto F si trovi sulla CD, e il punto H sulla AB, e l'estremo G segnerà un punto del contorno dell' elisse cercato.

La retta fhg presenta una delle posizioni che dovrà avere la FG e però il punto g sarà uno dei punti cercati.

PROBLEMA IV.

Data la pianta $ACBD$ (Fig. 4) e l'alzato $acbd$ di una sfera, trovare il contorno dell'ombra propria della stessa in pianta ed in alzato.

Sieno LH, Lh le direzioni del raggio di luce in pianta ed in alzato.

Dal centro O della pianta si tirino i due diametri AB, CD il primo parallelo ad LH, e l'altro perpendicolare ad AB. Ciò fatto da un punto qualunque h della Lh si tiri hH perpendicolare ad ML, indi HN perpendicolare ad HL nel punto H ed eguale ad Hv, e si unisca il punto L col punto N. Facciasi ora l'angolo DOG eguale all'angolo HLN, e dal punto G si tiri GE perpendicolare ad OB, e descritto in fine il semielisse CED coi semiassi CO, OE, sarà questa la pianta del contorno dell'ombra cercata.

Per ottenere l'alzato del contorno dell'ombra, eseguite rapporto alla Lh le operazioni praticate per la LH, si opererà in seguito in un modo analogo al già esposto, come si scorge dall' ispezione della figura.

Così se si avrà un arco di cerchio esprimente l'alzato di un segmento di sfera, si descriverà l'arco rimanente al compimento del cerchio, e mediante la costruzione indicata si otterrà il contorno dell'ombra corrispondente al segmento dato.

Nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, vale a dire, che Lh (Fig. 5) formi l' angolo MLh di 45°, si avrà il contorno dell' ombra in alzato, conducendo il diametro ab parallelo ad Lh, il diametro cd perpendicolare ad ab, e dal punto b la tangente bm eguale a bc; indi unito il punto m col punto o, e condotta ne perpendicolare ad ab, si avranno i due semidiametri co, oe del semielisse cercato ced.

Nell'ipotesi suddetta, si avrà il contorno dell'ombra in pianta, prendendo $o\acute{e}$ eguale ad oe, e descrivendo coi semiassi ao, $o\acute{e}$ il semielisse $a\acute{e}b$ corrispondente alla pianta.

PROBLEMA V.

Data la pianta $DCBAE$ (Fig. 6) e l'alzato $cmau$ di un toro, trovarne l'ombra propria in pianta ed in alzato.

Sieno LH, Lh le solite direzioni del raggio di luce, e sia ac la retta che passa pei centri dei due simicircoli laterali.

Col centro O, e col raggio ON eguale ad AE si descriva un cerchio SRN, e considerato questo come pianta di una sfera, si trovi l'elisse $NQZV$ rappresentente l'ombra propria della supposta sfera (costruzione antecedente) servendosi delle direzioni date LH, Lh.

Fatto ciò, dal centro O si tiri ad arbitrio un indefinita OX, e presa la parte QX eguale ad OE si avrà nel punto X un punto del contorno dell'ombra in pianta. Condotta poi Xx perpendicolare ad ML, e QS perpendicolare ad OQ dal punto Q, e segnata la parte Zx eguale a QS, si avrà in alzato il punto x corrispondente al punto X della pianta.

Operando similmente per qualunque altra retta OY, si otterrà un altro punto Y in pianta, ed il suo corrispondente y in alzato, per cui si potranno determinare quanti punti si vogliono del contorno dell'ombra cercata.

Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, si descriverà l'elisse $NQZV$ come nella figura 5.

PROBLEMA VI.

Trovare l'ombra propria di un ovolo in pianta ed in alzato.

Se dalla figura 6 si levi dall' alzato la metà acn, si avrà nel rimanente la pianta, e l'alzato di un ovolo. Condotta quindi OB perpendicolare alla direzione del raggio LH, e segnata in pianta la parte $BYXF$ del contorno dell' ombra del toro in pianta, e la sua corrispondente byx in alzato (costruzione antecedente) marcheranno queste linee il contorno dell' ombra cercata.

PROBLEMA VII.

Data la pianta circolare ACB (Fig. 7) e l'alzato adb di una cupola, trovare la pianta e l'alzato dell'ombra propria della medesima.

Sieno LH, Lh le solite direzioni del raggio di luce. Si tiri da un punto qualunque h la retta hH perpendicolare ad ML, indi HN perpendicolare ad LH ed eguale ad hv, e si unisca il punto N col punto L.

Fatto ciò, pel centro O si tiri DOE paralella ad LH, OK perpendicolare ad OE, e da un punto qualunque E della OE si tiri EK paralella ad NL. Descrivasi ora la figura DFG perfettamente eguale a odb, e sulla OE il semicircolo OXE; posto ciò si tiri nel semicerchio OXE, ed al di sotto della OB, una retta qualunque OX, si prenda OY eguale ad OX e si unisca il punto Y col punto K. Si tiri PQ paralella a KY e tangente la curva FPG: si abbassi

dal punto di contatto P la PS perpendicolare alla DG e presa OT eguale a DS si avrà in T la pianta di un punto del contorno dell' ombra cercata, per cui condotta Tt perpendicolare ad ML, e segnata la parte zt eguale ad SP, il punto t marcherà l' alzato del punto T.

Variando la posizione della sola OX ed operando del resto in un modo analogo, si potranno ottenere quanti punti si vogliono del contorno dell' ombra cercata.

La costruzione esposta ha luogo anche per tutte quelle figure, le cui sezioni perpendicolari all' asse siano costantemente dei circoli.

PROBLEMA VIII.

Dato l' alzato $ACBNDM$ di un toro in un archivolto qualunque, trovarne l' ombra propria.

Fatto centro in un punto qualunque O, si descriva col diametro AM un cerchio dsc; e considerato questo come l' alzato di una sfera, se ne trovi il contorno dell' ombra propria dzc (Probl. IV.) dipendentemente dalle date direzioni LH, Lh.

Si determini il punto C, dove la tangente CE, paralella alla direzione Lh, tocca la curva data. Preso quindi nella parte CXA un punto qualunque X, si tiri per questo punto la XF tangente la curva, e la XS perpendicolare ad XF; dal centro O si tiri Os paralella ad XS; si faccia ZS eguale a zs, e si avrà in Z un punto del contorno dell' ombra cercata; così preso nella parte CB un punto qualunque Y, si tiri per questo la YG tangente la curva, e la YR perpen-

dicolare ad YG; indi pel centro O la Oy paralella ed RY, e presa TY eguale a ty, sarà T un punto del contorno dell'ombra propria della rimanente porzione.

Se il contorno $ACBNDM$ rappresenterà l'alzato di un ovolo, il cerchio dsc dovrà descriversi con raggio AM, e determinato mediante la costruzione esposta il contorno dell'ombra spettante alla parte $MDCXA$, sarà questo il contorno dell'ombra cercata.

PROBLEMA IX.

Dato l'alzato $ABCD$ (Fig. 9) di un pezzo di colonna spirale non rastremata, e data la pianta QXY e l'alzato qyp dell'elice direttrice, trovarne l'ombra propria.

Siano Q, q la pianta e l'alzato di un medesimo punto dell'elice, LH, Lh le direzioni date del raggio di luce.

Dal punto r dove la retta Oq perpendicolare ad ML sega l'alzato qyp, si tiri rs tangente la curva; si seghi mq eguale ad OY, e si tirino le mo, on paralelle rispettivamente alle sr, Lh, e così nN, ON parelelle alle Qr, LH. Fatto ciò si unisca il punto N ad un punto qualunque X della periferia QXY, e condotta la OX, si tiri OY perpendicolare ad OX e per Y la YZ perpendicolare ad NX ed eguale a qD. Dai punti Y, Z si innalzino le Yy, Zz perpendicolari ad ML, e finalmente condotta yz paralella alla stessa ML si avvà in z un punto del contorno dell'ombra cercata.

Nell'esposta figura 9 si è segnato il contorno dell'ombra propria nell'ipotesi che l'elice direttrice siegua l'an-

damento $Q\,X\,Y$, che se questo seguirà invece l'andamento contrario $Q\,Y\,X$, la perpendicolare $O\,Y$, dovrà condursi in senso opposto, operando nel resto come si è detto.

Per avviarsi nella ricerca del contorno dell'ombra propria di qualunque superficie, si tirino delle rette paralelle alla direzione in pianta del raggio di luce, le quali seghino la pianta della data superficie; indi si trovi l'alzato corrispondente a ciascuna di queste sezioni, e condotte a queste le tangenti parallele alla direzione in alzato del raggio di luce, si avranno nei punti di contatto tanti punti del contorno dell'ombra cercata.

In tutte le costruzioni esposte si è segnato soltanto la parte del contorno dell'ombra visibile, supponendo l'osservatore perfettamente di fronte all'alzato; ma colle medesime regole si potrà segnare anche il contorno dell'ombra trasparente.

PROBLEMA X.

Data la pianta $BATKCD$ (Fig. 10), e l' alzato $barscd$ di una porzione di superficie cilindrica, trovare il contorno dell' ombra che accade nel suo interno.

Sieno LH, Lh le solite direzioni del raggio di luce in pianta, ed in alzato. Da un punto h della Lh si conduca hH perpendicolare alla ML, e dai punti H, h tirinsi le HN, hn rispettivamente paralelle ai lati AB, ab, e condotta dal punto n la nN perpendicolare ad ML, si unisca il punto N col punto L.

Fatto ciò si guidino le AG, BF rispettivamente paralelle ad LN, LH, e dal punto G la GF paralella ad AB, ad incontrare la BF: si tirino quindi le Gg, Ff perpendicolari ad ML, e gf paralella ad ab, e si avrà nelle due GF, gf l' ombra portata dagli spigoli AB, ab.

Condotta la tangente KE paralella ad LN, e preso nella BK un punto qualunque X, si guidi la XT paralella ad AB, le TY, XZ rispettivamente paralelle alle LN, LH, e la YZ paralella ad AB. Dai punti Y, Z, si tirino le Yy, Zz perpendicolari ad ML, e dal punto y, la yz paralella ad ab, e si avrà nei punti Z, z la pianta e l' alzato di un medesimo punto del contorno dell' ombra.

Variando la posizione del punto X, ed operando come sopra, si avranno quanti punti si vogliono del contorno cercato, e lo stesso si praticherà sempre in casi simili.

PROBLEMA XI.

Data la pianta AKD (Fig. 11), e l'alzato $barscd$ di una superficie cilindrica verticale, determinare l'ombra portata dal suo contorno nell'interno della medesima.

Stabilite le solite direzioni LH, Lh, si tiri dal termine A la retta AG paralella ad LH, indi Gf perpendicolare ad ML, e dal punto b la bf paralella ad Lh, e si avrà in gf l'ombra portata dallo spigolo ab.

Condotta la tangente EK paralella ad LH, si prenda nella parte KA un punto qualunque X, e si tiri XY paralella ad LH, e le due Xx, Yy perpendicolari ad ML, e condotta finalmente xy paralella ad Lh, si avrà in y l'alzato di un punto del contorno dell'ombra portata dalla sezione superiore nell'interno del cilindro.

PROBLEMA XII.

Essendo dato l'alzato $adcbfF$ (Fig. 12), ed il profilo FKQ dello spaccato di una volta a botte qualunque, trovare l'alzato del contorno dell'ombra portata nel suo interno.

Fissate le direzioni LH, Lh, e condotta la hH perpendicolare ad ML, si prende Ln eguale ad $H\nu$, e condotta nm perpendicolare ad ML, ed eguale ad $h\nu$ si congiunga il punto m col punto L. Fatto ciò si conducano dai punti f, F le fg, FG rispettivamente paralelle ad Lh, Lm, e pel punto G la Gg paralella ad ML, e nella ge si avrà l'ombra portata dallo spigolo Ff.

Condotta poi la tangente KE paralella ad mL, si prenda nella curva KF un punto qualunque X, e si tirino Xx paralella ad ML, e le due xy, XY rispettivamente paralelle alle hL, mL, e guidata per ultimo Yy paralella ad ML, sarà y un punto del contorno dell' ombra cercata.

Nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, le rette FG, XY, KE ec., si conduranno tutte paralelle ad Lh, senza bisogno di determinare la mL.

PROBLEMA XIII.

Data la pianta AYD (Fig. 13), e l'alzato $abcd$ di una porzione di cilindro retto, e data la pianta PXQ, e l' alzato pxq di una linea qualunque, trovare il contorno dell' ombra portata da questa linea sulla data superficie cilindrica.

Sieno LH, Lh le direzioni date.

Preso un punto qualunque X nella PQ, si tiri Xx perpendicolare ad ML, e dai punti X, x le XY, xy rispettivamente paralelle ad LH, Lh, e tirata Yy paralella ad Xx, si avranno i punti Y, y esprimenti la pianta e l'alzato di un medesimo punto del contorno dell' ombra cercata.

Questa figura presenta un caso particolare del problema enunciato, dove per la *linea qualunque* si è preso una parte del contorno dell' ombra propria di un tondino appartenente al sommoscapo di una colonna.

PROBLEMA XIV.

Data la pianta $AKYD$ (Fig. 14), e l'alzato $acbd$ di una porzione di superficie conica, trovare l'ombra portata dal suo contorno nell'interno della medesima.

Siano LH, Lh le direzioni date, e sia C la pianta del vertice del cono.

Dai punti C, c si tirino CN, cM rispettivamente paralelle ad LH, Lh, ed MN perpendicolare ad ML.

Condotta pel punto A la retta NAG, si tiri Gg perpendicolare ad ML, e uniti i punti C, c coi punti G, g, si tirino le rette ae, eE paralelle alle due Lh, Gg, e le rette CE, ce segneranno l'ombra portata dagli spigoli AC, ac nell' interno del cono.

Guidata NK tangente la curva $AKYD$, e preso nella KA un punto qualunque X, conducasi la NXY, e dai punti X, Y le Xx, Yy perpendicolari ad ML, ed uniscasi il punto C col punto Y; si tirino quindi le xz, zZ paralelle alle due Lh, Gg, e i punti Z, z saranno la pianta e l'alzato di un punto del rimanente contorno cercato.

PROBLEMA XV.

Data la pianta ADB (Fig. 15), e l'alzato acb di un cono; e data la pianta PQ, e l'alzato pq di una linea qualunque, trovare l' ombra portata da questa linea sul cono dato.

Sieno LH, Lh le direzioni date, e C la pianta del vertice del cono.

Preso nella PQ un punto qualunque X, si tiri Xx perpendicolare ad ML, indi le due xz, cn paralelle ad Lh, le XZ, CN paralelle ad LH, e le Zz, nN perpendicolari ad ML. Condotta ora la NZA, si unisca il punto A col punto C, mediante la retta AC, e si avrà nell' intersezione Y delle due AC, XZ un punto della pianta del contorno dell' ombra cercata; per cui tirata Yy perpendicolare ad ML, si avrà in alzato il punto y corrispondente al punto Y della pianta.

PROBLEMA XVI.

Data la pianta ABC (Fig. 16), e l' alzato fxy dello spaccato ordinario di una sfera, trovare in pianta ed in alzato il contorno dell' ombra portata dal suo lembo nell' interno della medesima.

Stabilite le direzioni LH, Lh, si tiri la hH perpendicolare ad ML, la hn perpendicolare ad hL ed eguale a vH, e si uniscano i punti n, L.

Fatto ciò per un punto qualunque x si guidi xy paralella ad Lh, e presa questa come diametro, si descriva il semicerchio xzy. Dal punto x si tiri xz paralella ad nL, e zt perpendicolare ad xy, ed il punto t sarà l' alzato di un punto del contorno dell' ombra cercata. Condotte quindi le xX, tT perpendicolari ad ML, ed XT paralella ad LH, si avrà in pianta il punto T corrispondente al punto t.

Nell' ipotesi che i raggi abbiano l' ordinaria direzione, si avrà immediatamente il punto t, prendendo yt eguale alla terza parte di xy.

Essendo il contorno ftg un semiellisse, si potrebbe anche descriverlo dipendentemente dai suoi assi.

Dato che sia l' alzato del contorno di un' ombra, se ne avrà la sua pianta, operando per ciascun punto del medesimo alzato, come si è fatto per il punto t, onde averne il corrispondente punto T in pianta.

PROBLEMA XVII.

Trovare l'ombra portata nell'interno di una porzione di una superficie sferica, che ha per pianta il segmento ABC (Fig. 17), e per alzato il cerchio fxy.

Fissate le direzioni LH, Lh, si conduca hH perpendicolare ad ML, indi hn perpendicolare ad Lh, ed eguale ad Hv, e si congiunga il punto n col punto L.

Fatto ciò da un punto qualunque x, si tiri xy paralella ad Lh, e condotto il diametro ac perpendicolare ad xy, si prenda ed eguale ad ED (perpendicolare calata dal centro D dell'arco ABC sulla corda AC) e si descriva col centro d l'arco xzy: si guidi xz paralella ad nL, e zt perpendicolare ad xy, ed il punto t marcherà l'alzato di un punto del contorno cercato.

Per avere la pianta del punto t, si eseguirà l' operazione praticata per il punto t (Fig. 16).

Se l' arco ABC sarà maggiore di un semicerchio, si prenderà in tal caso la ed al di sotto della xy, operando nel resto come sopra.

PROBLEMA XVIII.

Dato l'alzato $ACBD$ (Fig. 18) dell' ottava parte di una superficie sferica, trovare l'ombra che accade nel suo interno, nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.

Si divida per metà nel punto D l'arco ADB, e si unisca il punto B col punto A: si tiri quindi Dd paralella a BC, e presa Ba uguale ad un terzo di BA, si avrà nei tre punti D, a, d gli estremi del contorno dell' ombra cercata.

Preso poi nell'arco AD un punto qualunque X, si tirino le XY, Xx rispettivamente paralelle alle AB, BC; si seghi ZY eguale ad un terzo della XY, e tirate le Zz, xz paralelle alle due BC, AB, si avranno i due punti Z, z appartenenti al contorno dell' ombra cercata.

PROBLEMA XIX.

Dato l'alzato AKB (Fig. 19) di una superficie sferica, e l'alzato AB di una sua sezione, od apertura orizzontale, trovare il contorno dell' ombra portata dal lembo di questa sezione nel suo interno, ammesso che i raggi di luce abbiano l' ordinaria direzione.

Si congiunga il punto E di mezzo della AB, col centro D: si prenda DF eguale ad un terzo di ED, e si tiri FG perpendicolare a DE, ed eguale ad FE. Fatto ciò, si unisca il punto D col punto G, e si tiri

$n\,Gm$ perpendicolare a DG, indi si prendano le Gm, Gn eguali ad AE, e le Gr, Gs eguali a due terzi della stessa AE, e si avrà nelle rette mn, rs i due assi dall' elisse $rnsm$ rappresentante il contorno cercato.

PROBLEMA XX.

Dato l' alzato di una superficie sferica AMB (Fig. 20), e quello di una sua apertura qualunque FXG, determinare l' alzato dell' ombra portata da questa apertura nell' interno della sfera.

Stabilite le direzioni LH, Lh, si tiri hH perpendicolare ad ML, e hn perpendicolare ad Lh ed eguale ad Hv, e si unisca il punto n col punto L.

Per un punto qualunque X del lembo dell' apertura, si tiri AXB paralella ad Lh; si descriva sotto di essa il semicerchio AYB, e condotta XY perpendicolare ad AB, si tiri Yy paralella ad Ln, ed yx perpendicolare ad AB, e si avrà nel punto x l' alzato di un punto del contorno cercato.

Se il punto obbiettivo corrispondente al punto X si troverà davanti al piano dell' alzato, il semicerchio AYB si descriverà al di sopra della AB. Questa norma è generale.

PROBLEMA XXI.

Dato l'alzato $Mabc\,dB$ (Fig. 21) dello spaccato ordinario di una tazza emisferica, avente il suo lu-

cernario $abcd$ cilindrico, trovare l'ombra che accade nel suo interno.

Sieno LH, Lh le direzioni de' raggi; condotto hH perpendicolare ad ML, si tirino le HN, hn perpendicolari ad LH, Lh, in modo che HN sia eguale ad hv, ed hn eguale ad Hv, e si unisca il punto L coi punti N, n.

Presa bc come diametro, si descriva il semicerchio bYc, rappresentante la pianta del lucernario, e condotta la tangente er paralella ad LH, si tiri per il centro O, e per il punto di contatto e la retta Oek. Presa ek eguale alla metà di ab, si tiri kr paralella ad LN, ed rs paralella a ke, indi le due em, sq perpendicolari a bc, e per ultimo la qt, e la tangente gp paralelle ad Lh. Si avranno con ciò le linee gd, dt, qb, ba, e parte della aM che portano ombra nell'interno della tazza, e la mq che porta l'ombra mt nell'interno del cilindro (determinata nel modo indicato nel Problema XI.)

Preso nella dt un punto X, si tiri TXV paralella ad Lh, e XY perpendicolare ad ad, e si descriva al di sotto della TV il semicerchio TZV. Condotta la Xy perpendicolare a TV, ed eguale a ZY, si tiri yz paralella ad Ln, e Zx perpendicolare a TV, e si avrà nel punto x l'alzato dell'ombra portata dal punto corrispondente al punto X.

In un modo analogo si avrà l'ombra portata da qualunque altro punto delle linee nominate, avvertendo che per le linee dg, ab, aM, la yz condotta paralella ad Ln, si guiderà immediatamente dal punto considerato.

Quando il punto X sia preso nella td, come nell'esposta figura, cadendo il punto y nel semicerchio TzV, riesce inutile la linea XZY, la quale si è unicamente condotta per essere la costruzione eseguita per il punto X applicabile anche per qualunque punto della bq.

PROBLEMA XXII.

Trovare l'alzato dell'ombra che porta una data linea qualunque sopra una data superficie sferica.

Siano PXQ, pxq (Fig. 22) la pianta e l'alzato della linea data, sia aeb l'alzato della superficie sferica, il punto O la pianta del suo centro, ed LH, Lh le solite direzioni dei raggi.

Da un punto h si tiri hH perpendicolare ad ML, indi hn perpendicolare ad Lh, ed eguale ad Hv, e si uniscano i punti n, L.

Pel punto O si conduca PQ paralella ad ML, e preso un punto qualunque X nella PXQ, si tiri Xx perpendicolare ad ML, xt paralella ad Lh, e xz perpendicolare ad xt, ed eguale ad XZ.

Descritto sulla et un semicerchio edt, si guidi la zd paralella ad nL, e condotta dy perpendicolare ad xt, si avrà nel punto y un punto dell'ombra cercata.

PROBLEMA XXIII.

Dato l'alzato dello spaccato ordinario di una superficie di rotazione (*), per esempio di una cupola, (Fig. 23), trovare l' alzato dell' ombra portata nell' interno dal suo lembo.

Siano LH, Lh le direzioni del raggio di luce, e PR l' asse della cupola.

Condotta la tangente GE paralella ad Lh, si tirino le GF, Eg perpendicolari ad ML, e la Fg paralella ad LH, indi si unisca il punto g col punto G. Fatto ciò si prenda nella curva GPM un punto qualunque K, e tirata Kk perpendicolare ad ML, si guidino le due Ky, ky rispettivamente paralelle alle due Gg, LH, e si avrà nel punto y della loro intersezione un punto della linea $Mypg$. In un modo affatto simile si potranno avere quanti punti si vogliano della medesima linea $Mypg$.

Descritta la $Mypg$, si tiri RS paralella ad LH, e per un punto qualunque X preso nella PR, si guidi XS paralella a Gg, e dai punti X, S, le due XY, St paralelle ad ML.

Fatto poi centro in S, con raggio eguale ad XY, si seghi in T la curva $Mypg$, e calata dal punto

---

(*) Chiameremo per brevità superficie di rotazione qualunque superficie, le cui sezioni fatte perpendicolarmente all' asse, siano costantemente dei cerchj, come sono ordinariamente le cupole: il toro, la scozia ec. nella base della colonna, l' ovolo, il sommoscapo ec. nel capitello.

T la Tt perpendicolare ad St, si prende Xz eguale ad St, e sarà z un punto dell' alzato del contorno dell' ombra cercata.

Nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, si otterrà il punto g, conducendo la Gg paralella ad ML, ed eguale a GF, e così il punto y, conducendo la Ky paralella ad ML, ed eguale a Kk. In questa medesima ipotesi la St cadrà nella XY.

PROBLEMA XXIV.

Dato lo spaccato MPQ (Fig. 24) di una cupola della natura dell' antecedente, preso sulla linea segnata in pianta AC, trovare l' ombra che accade nel suo interno.

Fissate le direzioni del raggio di luce LH, Lh, si descriva la curva MTg come si è fatto nella prima parte del Problema antecedente.

Dal centro O si conduca OD perpendicolare ad AC, e si prenda oR eguale ad OD; indi per un punto qualunque X, preso nella Po, si tiri XY paralella ad ML, ed YV perpendicolare alla stessa ML, e si unisca il punto V col punto R. Dai punti X, R, si tirino le rette Xx, RS rispettivamente paralelle ad Lh, LH, e pel punto x, la Sxy perpendicolare ad ML. Col centro S, e con raggio eguale ad RV, si seghi in T la curva MTg. Condotta pel punto T la Tt perpendicolare ad XY, si prenda Xz eguale ad yt, ed il punto z sarà uno dei punti del contorno dell'ombra cercata.

Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, si descriverà la curva MTg come si è indicato nel Problema antecedente, nella medesima ipotesi.

PROBLEMA XXV.

Dato l'alzato MPQ (Fig.25) dello spaccato di una cupola della medesima natura dell'antecedente, e dato l'alzato ACB di una sua apertura orizzontale, trovare il contorno dell'ombra che porta il lembo di quest' apertura nell' interno della cupola.

Siano LH, Lh, le direzioni del raggio, e PR l' asse della cupola.

Si tiri dal punto C la CD paralella ad Lh, e la CE che formi colla CB l' angolo BCE eguale all' angolo HLM; indi da un punto qualunque X, preso nella PR, si tiri XY paralella ad ML, e dal punto d' intersezione D, la DE paralella a PR. Si descrivano col centro C, e col raggio XY gli archetti Z, Z^1, e col centro E, e col raggio BC, si seghino questi due archetti nei punti Z, Z^1; calate poi le Zt, Z^1t^1 perpendicolari alla XY, si avranno i punti t, t^1 spettanti al contorno cercato.

Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, le due rette CE, CD coincideranno, e però condotta CD paralella ad Lh, sarà D il centro degli archetti da descriversi col raggio CB.

Nell' esposta Fig. 25 si è segnato tutto il contorno dell' ombra portata dall' apertura orizzontale, come se la cupola fosse intiera, ma nel caso considerato si conduranno dai punti A, B due rette paralelle al raggio di luce Lh, onde avere gli estremi dell' ombra cercata.

PROBLEMA XXVI.

Data la pianta ABC (Fig. 26), e l'alzato MPQ dello spaccato di una cupola della stessa natura delle antecedenti, e data la pianta DEF, e l'alzato def di una sua rottura qualunque, trovare il contorno dell'ombra portata nella superficie interna della cupola dal lembo di essa rottura.

Stabilite le direzioni LH, Lh del raggio di luce, per un punto qualunque g preso nella curva def, si tiri gG perpendicolare ad ML, e dai punti g, G, le due gk, GK paralelle alle due Lh, LH, e dal punto k la Kk perpendicolare ad ML, e si avrà in K un punto del contorno della figura TK determinata coll'eseguire per altri punti della def l'operazione praticata pel punto g.

Preso nell'asse PR un punto qualunque Z, si tiri XZY paralella ad ML, e Zz paralella ad Lh; indi pel centro O, la OS paralella ad LH, e la zS perpendicolare ad ML. Fatto centro in S col raggio ZY si seghi in T, T' la curva TK, e condotte dai punti T, T' le Tx, $T'x'$ perpendicolari ad ML, si prendano le due Zt, Zt' eguali rispettivamente alle due zx, zx', e si avranno i due punti t, t' appartenenti al contorno cercato.

PROBLEMA XXVII.

Data la pianta e l'alzato di un ovolo (Fig. 27), e data la pianta e l'alzato di una tavola in angolo so-

vraposta al medesimo, trovare in pianta ed in alzato il contorno dell' ombra portata dal lembo della tavola sull' ovolo dato.

Siano LH, Lh le direzioni del raggio, e sia il punto O la pianta dell' asse oK dell' ovolo.

Si conduca OR perpendicolare alla BC, e dal punto R la RS paralella ad LH, e prolungata la BC fino in D, si tirino le Dd, Ss, Rr perpendicolari ad ML, e dal punto r la rs paralella ad Lh, indi congiungasi il punto d col punto s, mediante la dsn, e si unisca il punto r col punto n.

Fatto ciò da un punto qualunque V, preso nell'asse oK, si tiri XVY paralella ad ML, e pel punto z, la zZ perpendicolare alla stessa ML, e la retta TT' perpendicolare ad OR nel punto Z. Fatto quindi centro in O, con un raggio eguale a VY, si seghi in T, T' la retta TT', e si conducano per ultimo le rette Tt, $T't'$ perpendicolare ad ML. Si avranno con ciò i punti T, T' in pianta, e t, t' in alzato appartenenti al contorno dell'ombra cercata.

Eseguendo per la AB un operazione analoga alla praticata per la BD, si troverà l' ombra portata dall'altro spigolo della tavola sulla superficie dell'ovolo dato, come si vede eseguito nella figura.

PROBLEMA XXVIII.

Descrivere il contorno dell' ombra portata dalla tavola posta sull' ovolo come nella (Fig. 28).

Siano LH, Lh le direzioni date, ed OK l' asse dell' ovolo.

Condotta hH perpendicolare ad ML, e presa Ln eguale ad Hv, si tiri nm perpendicolare ad ML, ed eguale ad hv, e si unisca il punto m col punto L.

Fatto ciò si tiri MR paralella ad mL, e per un punto qualunque V dell'asse OK, si tiri XVY paralella ad ML, e presa VS eguale a Vs, si faccia centro in S, e con raggio eguale a VX, si seghi la XY nei punti t, t che saranno due punti del contorno dell' ombra cercata.

Similmente condotta qualunque altra $X^1 V^1 Y^1$ paralella ad ML, si prenda $V^1 S^1$ eguale a $V^1 s^1$, e fatto centro in S^1 col raggio $V^1 X^1$, si seghi la $X^1 Y^1$ nei punti t^1, t^1, e saranno questi altri due punti del contorno dell' ombra cercata.

Quando i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, si avrà immediatamente il punto S, prendendo OS eguale ad OM. In questa medesima ipotesi, cadendo tutti i punti S, S^1 ec. nel punto R, si avranno i punti $t, t; t^1, t^1$, facendo costantemente centro in R, e segando successivamente le rette $XY, X^1 Y^1$ coi raggi $VX, V^1 X^1$.

Questa semplicissima costruzione serve egualmente per determinare l'ombra portata da una retta orizzontale, paralella al piano dell' alzato sopra una superficie di rotazione qualunque.

PROBLEMA XXIX.

Trovare l' ombra portata da una linea verticale sopra una superficie di rotazione.

Sia la data superficie di rotazione l' imoscapo $bcda$ di una colonna (Fig. 29) e la verticale data,

l'ombra propria $p\,q$ della parte cilindrica della medesima colonna.

Fissate le direzioni LH, Lh, si tiri dal punto G, pianta della verticale $p\,q$, la retta GE paralella ad LH, e preso nella $a\,d$ un punto X, si tiri XY paralella ad ML, e fatto centro in O, col raggio XY, si seghi nel punto Z la retta GE, e condotta Zz perpendicolare ad ML, si avranno i punti Z, z esprimenti la pianta e l'alzato di un punto dell'ombra cercata.

PROBLEMA XXX.

Dato l'alzato di una superficie di rotazione che ha l'asse verticale, e data la pianta e l'alzato di una linea qualunque, trovare l'alzato dell'ombra portata da questa linea sulla superficie data.

Sia la data superficie di rotazione la scozia $a\,d\,c\,b$ (Fig. 30) di una base, e la linea data sia l'ombra propria $p\,x\,q$ del toro sovrapposto.

Fissate le direzioni LH, Lh del raggio di luce, si tiri per un punto qualunque preso nella pianta o nell'alzato della linea data la Xx perpendicolare ad ML, e pei punti X, x le rette XY, xy, paralelle alle due LH, Lh, e la yY perpendicolare ad ML, e si avrà con ciò in Y un punto della linea VYS; e così si potrà determinare tutta la linea VYS, ripetendo per altri punti della linea data l'operazione eseguita pei punti X, x.

Condotta per un punto qualunque K, preso nell'asse $a\,d$ l'orizzontale KG, si guidi la Kk paralella ad Lh e per il punto M, pianta dell'asse, la

MR paralella ad LH, e kR perpendicolare ad ML: col centro R, e col raggio KG, si seghi in T la VYS, e tirata la Tt perpendicolare ad ML, e la tz paralella ad Lh, si avrà in z un punto dell' ombra cercata.

PROBLEMA XXXI.

Trovare l' alzato dell' ombra che porta una linea qualunque sulla superficie di una colonna spirale, conoscendosi la pianta e l' alzato della linea data.

Siano PXQ, pxq (Fig. 31) la pianta e l' alzato della linea data, $MKabGc$ l' alzato di un pezzo di colonna spirale, ed LH, Lh le direzioni del raggio.

Condotta Xx perpendicolare ad ML, in modo che seghi la pianta e l' alzato della linea data, si tirino le rette XY, xy paralelle alle due LH, Lh, e la yY perpendicolare ad ML, e si avrà un punto Y della linea VYS, che si descriverà, ripetendo per altri punti della linea data quanto si è fatto per i punti X, x.

Fatto ciò si prenda un punto qualunque f nell'alzato della direttrice NfR, e fissato il corrispondente puntó F in pianta, si tirino le fe, FE paralelle alle direzioni Lh, LH, e la eE perpendicolare ad ML, indi pel punto f, la KfG paralella ad ML; fatto centro in E, col raggio fG, si seghi in T, T' la VYS, si conducano le Tt, $T't'$ perpendicolari ad ML, e guidate finalmente le tz, $t'z'$ paralelle ad Lh si avranno in z, z' due punti dell' ombra cercata.

PROBLEMA XXXII.

Dato l'alzato $Mabcde$ (Fig.32) di un toro in un archivolto qualunque, e data la pianta PXQ e l'alzato pxq di una linea, trovare l'alzato dell'ombra portata dalla linea data sulla superficie del toro.

Siano LH, Lh le direzioni date.

Per un punto qualunque ν della ML, si tiri hH perpendicolare ad ML, indi hn perpendicolare ad Lh, ed eguale a νH, e si unisca il punto n col punto L.

Da un punto preso nella pianta o nell'alzato della linea data, si tiri Xx perpendicolare ad ML, ed xy paralella ad Lh, e preso nella parte dy un punto f, si tiri fk perpendicolare ad xy, e fissata in pianta la parte FM eguale alla perpendicolare calata dal punto f sulla curva Mda, si tiri nel semicerchio MKe la FK perpendicolare ad Me, e presa fk eguale ad FK, si avrà in k un punto della linea $dksy$, descritta coll'eseguire per varj punti della dy l'operazione praticata per il punto f.

Fatto ciò si tiri xz perpendicolare ad xy ed eguale ad XZ, indi zs paralella ad nL, ed st perpendicolare ad xy, che darà in t un punto dell'ombra cercata.

Nello stesso modo si potrà determinare la curva mr, rappresentante l'ombra portata da una parte del contorno dell'ombra propria del toro dato.

Se l'archivolto sarà composto d'archi circolari, come nell'esposta figura, si potrà avere più facilmente l'ombra portata dalla linea data col metodo indicato nel Prob. XXX, eseguendo per questo alzato le operazioni praticate in quello per la pianta.

Il metodo esposto in questo Problema è quello delle sezioni reali, ed è applicabile a tutti i casi in cui si conosca la pianta e l' alzato della superficie data, e della linea data.

Le costruzioni praticate per la cupola (nei Prob. XXIII, XXIV, XXV e XXVI), per l' ovolo (Prob. XXVII e XXVIII), per l' imoscapo (Prob. XXIX) e per la scozia (Prob. XXX) sono egualmente applicabili per tutte le superficie di rotazione, qualunque ne sia il profilo.

PROBLEMA XXXIII.

Dato l' alzato e la pianta della sagoma espressa dalla (Fig. 33), trovare i contorni delle ombre che accadono su di essa, e sul piano dell' alzato, nell' ipotesi che la luce abbia la direzione ordinaria.

Delle ombre che accadono sulla sagoma.

Si tiri bc in modo che l'angolo cbA sia semiretto, indi l' orizzontale cG; e sarà $AbcG$ l' alzato dell' ombra portata dalla listella Aba sulla gola.

Si conduca de paralella alla bc e tangente all'arco dc, indi le orizzontali dH, eN, e si avrà l' alzato dell' ombra che porta la gola sopra se stessa, e sulla listella sottoposta.

Guidata kf paralella anch' essa alla bc, ed fR orizzontale, si avrà l'ombra portata sul muro dalla listella anzidetta.

Dell' ombra cagionata sul piano dell' alzato.

Condotte dai punti c, d, le cC, dD perpendicolari alla ML, si tirino le ag, bh, ci, dm, en, kz, fv, e le Bo, Cs, Dq, Et, Fu, che facciano angoli semiretti colla stessa ML.

Conducansi le verticali ohg, tzn, e dai segmenti h,z,n, le orizzontali $hi, nm, z\nu$, indi la verticale $u\nu$.

Si descriva l' ombra mi portata dalla linea cd, eseguendo per ciascun punto di quest' ultima linea ciò che si è fatto pel punto a, onde avere il punto g, e si avrà l' estremo dell' ombra richiesta.

Osservazione.

Se la sagoma fosse quella espressa dalla (Fig.34), si conduca bc tangente l'arco ab e che faccia l'angolo semiretto colla ML, indi tirate le orizzontali bA, cF, segneranno queste l' ombra propria del toro e l' ombra cagionata dal medesimo sulla listella. Tirata poi de paralella a bc, e la retta eG orizzontale, si avrà l' estremo inferiore dell' ombra cadente sul muro.

Condotta bB perpendicolare alla ML si tirino le af, ch, dm, en, e le Bo, Dp, Eq, le quali facciano tutte angoli semiretti colla ML, e la prima di queste cioè af sia anche tangente all' arco ab. Tirate poi le verticali qn, pmh, e le orizzontali nm, hg, e descritto infine l' arco fg, col fare per ciascun punto dell' arco ab quello che si è fatto pel punto b, onde avere il punto g; si otterrà l' estremo dell' ombra portata dalla sagoma sul piano dell' alzato.

PROBLEMA XXXIV.

Dato l'alzato e la pianta della sagoma che esprime la (Fig. 35), descrivere l'alzato dell'ombra che cagiona sopra se stessa, e quella portata sul piano dell'alzato, qualunque sia la direzione della luce.

Dell' ombra che accade sulla sagoma

Stabilite le direzioni LH, Lh, del raggio di luce, si tiri Hh perpendicolare ad ML, e presa Ln eguale ad $H\nu$ si tiri la perpendicolare nm eguale a νh, e si unisca il punto L, col punto m.

Pel punto a si conduca ac paralella ad Lm, indi ab paralella ad Lh, e l'orizzontale cbb; e sarà dbb l'alzato dell'ombra che accade sul guscio.

Similmente condotte le eg, ef, gff, rispettivamente paralelle alle ac, ab, cb; si avrà in iff l'alzato del contorno dell'ombra portata dal guscio sul muro sottoposto.

Osservazione.

Se il punto d cadrà in c o sotto del medesimo, l'estremo dell'ombra dbb si ridurrà alla sola retta orizzontale cb tirata pel punto c: altrettanto si dirà del punto i rispetto al punto g.

Dell' ombra portata sul piano dell' alzato.

Si tirino le tq, zp, br, xo, fy tutte paralelle ad Lh, e le Zs, Xk, paralelle ad LH, indi le verticali spq, ko, yu, e le orizzontali pr, oy, e saranno le tq, qp, pr, oy, yu altrettante parti dell' ombra richiesta.

Si descriva l' ombra or portata dalla linea bx, facendo per ciascun punto della bx ciò che si è fatto per il punto x, onde avere il corrispondente punto o; e così si avrà tutta l' ombra dimandata.

PROBLEMA XXXV.

Trovare l'alzato e la pianta dell'ombra che porta sopra se stessa la base toscana (Fig. 36) con una porzione di colonna non rastremata; e trovare i contorni delle ombre portate dalla medesima sui piani dell' alzato e della pianta, nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria così detta di 45 gradi.

Dell' ombra che la base porta sopra se stessa.

Si unisca il centro S della pianta col punto I, e pel punto B si tiri la verticale ba avente il termine b ove incomincia l' imoscapo, e sarà questa ba l'alzato dell'estremo dell'ombra propria della porzione del fusto della colonna.

Condotta BCP perpendicolare alla BS, e pel punto C la Cc perpendicolare ad ML, si avranno in alzato i termini b, c dell'ombra portata sull'imoscapo da una porzione della retta ab, e la pianta di quest' ombra sarà la retta BC. La curva bc si descriverà mediante la regola data nel Prob. XXIX.

Per il punto D si tiri Ded perpendicolare ad ML, e la sua parte ed sarà l' alzato dell' estremo dell' ombra propria della listella.

Presa ej eguale ad ed, si tirino le DJ, St paralelle alla BC ed eguali alla dj, indi col centro t si descriva l' arco JF: la retta DJ sarà la pianta dell' ombra portata dalla retta il cui alzato è dc sull' anello orizzontale, e l' arco JF la pianta dell' ombra portata sul medesimo anello dall' arco il cui alzato è una parte della dc. (L' alzato corrispondente alla pianta DJF riesce invisibile, trovandosi in un piano orizzontale.)

Condotta Ff perpendicolare ad ML si tirino le cg, fv paralelle alla dj e la FV paralella a BC; si descriva quindi l' alzato fg, e la pianta FG dell' ombra portata sul toro dell' arco corrispondente all' alzato vc, servendosi della costruzione indicata nel Prob. XXVI.

Mediante il citato Prob. XXIX si descriva cominciando in g, l'alzato gh dell'ombra portata sul toro da una parte della retta ab; e la pianta GH corrispondente all' alzato gh si troverà sul prolungamento della retta BC.

Fatto ciò si descriva l'alzato hup di una parte del contorno dell'ombra propria del toro col Prob. V segnandone in pianta la sola porzione visibile AH.

Finalmente si tiri nu che formi l'angolo semiretto colla ML, la uU perpendicolare alla stessa ML,

e la UN paralella a BC, ed il punto N segnerà in pianta un termine dell'ombra AN portata sul plinto da una porzione del contorno dell' ombra propria del toro, la quale AN si descriverà agevolmente prendendo nella AU un punto qualunque, indi il suo corrispondente in alzato nella up, e conducendo per questi due punti delle linee rispettivamente paralelle alle due UN, un, quindi una terza linea paralella ad Nn, che darà uno dei punti cercati.

Dell' ombra portata sul piano della pianta.

Tirata dal punto I la IK paralella alla BC, si prolunghi la retta un sino in i, indi per il punto i si tiri iEK paralella ad NI, e presa EK eguale ad NI sarà questa l' ombra portata sul piano della pianta dalla porzione di spigolo corrispondente alla NI.

Fissato un punto qualunque nella UH, indi il suo alzato corrispondente nella uh ed operando per questi come si è fatto per avere il punto K mediante i due punti I, n, si troveranno quanti punti si vogliono della EO rappresentante l' ombra portata dalla linea che ha per pianta la UH.

Condotta la aX paralella ad ui, e la XP perpendicolare alla ML ad incontrare la BC prolungata, si otterrà nella retta OP l' ombra che porta la parte superiore della linea verticale ab.

Condotta finalmente la PY paralella ed eguale alla BS, si descriva col centro Y l' arco circolare PQ eguale a BZ: e si avrà con ciò tutto il contorno dell' ombra portata sul piano della pianta.

Nell' esposta figura riescono visibili le sole linee IK, KE, EL, ed invisibili tutte quelle che trovansi al di là della ML.

Dell' ombra che porta la stessa base sul piano dell' alzato.

Per il punto T dove la BT interseca la ML si elevi la Ty perpendicolare alla stessa ML ad incontrare la retta aX nel punto y, e sarà questo l' alzato dell' ombra portata sul muro dal punto rappresentato in a.

Fissato quindi nell'arco BZ un punto qualunque si trovi nella az il suo alzato corrispondente e si eseguisca per questi l' operazione già fatta pei due punti B, a: si avrà con ciò un altro punto dell'arco ellittico my esprimente l' ombra portata dall' arco circolare la cui pianta è BZ.

Tirata dal punto h la retta ho, si avrà l' ombra oy portata da una porzione della linea ab.

Come si è trovato il punto y mediante i due punti B, a, così si troverà il punto k mediante i due punti U, u, e così pure si troveranno tutti i punti della linea ok, prendendo sempre due punti corrispondenti nelle linee UH, uh.

Con i due punti I, n trovato il punto q si avrà l' ombra kq mandata dalla linea IN.

Condotta finalmente la ql perpendicolare ad ML, e l'orizzontale lI marcheranno queste l'ombra portata dalli spigoli corrispondenti alle linee nr, RI.

Anche in questo caso è da osservarsi che l' ombra $Lkql$ che cade al disotto della ML riesce invisibile.

PROBLEMA XXXVI.

Trovare l'alzato del contorno dell' ombra che il capitello toscano (Fig. 37) porta sopra se stesso, e sul piano dell'alzato nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.

Dell' ombra che porta sopra se stesso.

Si trovi l'alzato dell' ombra che la cimasa porta sull'abaco conducendo la KZ che formi angolo semiretto colla ML, e l'orizzontale ZV segnerà l'estremo dell' ombra cercata.

Mediante la costruzione indicata nel Prob. VI si descriva la pianta AHU, e l'alzato ahu del contorno dell'ombra propria dell'ovolo, e col Prob. XXVIII si segni la linea hvn esprimente l'estremo dell'ombra portata dall' abaco sul toro.

Condotta per il punto h la retta he che formi angolo semiretto colla ML si prenda nell' asse del capitello la parte bk eguale a BM, e col centro k e raggio bk si descriva l' arco de.

Tirate dai punti R, d le Rg, dl paralelle ad he si seghi la parte ck' eguale a BP, e si descriva col centro k' l' arco gl - Quando sia MP eguale all'altezza bc, il punto k servirà a descrivere tanto l'arco de come l' arco gl.

Fatto l'angolo CBL semiretto, si tiri dal punto Q la tangente QT, indi le Qq, Tt perpendicolari ad ML, e dal punto t condotta la tq paralella alla Rg, si otterrà il punto q.

Servendosi della costruzione praticata nel Prob. XIII si determinerà l'alzato $e\gamma f$ dell'ombra portata sulla listella da una parte della linea ht, indi pel punto f si tiri sfr paralella ad Rg, e la sS perpendicolare ad ML, e con la medesima costruzione del Prob. XIII si trovino gli alzati delle ombre lr, rg portate sul fregio dalle linee corrispondenti alle df, st.

Condotte pei punti e, l, γ, j le orizzontali em, lx, γn, ji, si avranno i punti m, x, n, i che congiunti fra loro come si scorge nella figura daranno le rimanenti linee cercate.

Osservazione I.

Quantunque le linee mn, ix sieno archi che si possono facilmente descrivere, servendosi dei loro profili $e\gamma$, lj ciò nonostante si possono figurare con due rette per essere questi archi cortissimi.

Osservazione II.

Si possono avere i punti n, i anche senza descrivere le linee $e\gamma$, lj come si è fatto di sopra, conducendo invece le MA, PN paralelle a QT, indi le Aa, No, perpendicolari ad ML, e le an, oi paralelle alla Rg, che daranno i punti richiesti. (*)

(*) Qualche volta si dirà di condurre delle rette, ma per conservare chiare le figure si segneranno i soli termini di esse.

Dell' ombra portata sul piano dell' alzato.

Dai punti D, K, Z, G, u, q, p, si tirino delle linee come la DE paralelle alla direzione del raggio, cioè che formino gli angoli semiretti colla ML, e altrettanto si faccia dai punti analoghi presi in pianta.

Le linee corrispondenti alle $DK, KZ', Z\,G, Gu'$, $ut, qp, p\,O$ saranno quelle che portano ombra sul piano dell' alzato, le quali ombre portate da queste linee si potranno determinare colla regola già più volte usata, prendendo nelle linee nominate un punto qualunque, indi la sua pianta, ed eseguendo sempre per questi punti l'operazione analoga a quella segnata nella figura pei due pnnti D, Y.

Osservazione.

Vi sono dei capitelli toscani, le cui parti sono tali che l' ombra propria dell' ovolo cade intieramente sul fregio; ve ne sono degli altri, pei quali l' ombra medesima è portata porzione sul fregio, e porzione sulla listella sovrapposta ad esso, ed alcuni se ne trovano in cui si verifica quanto si è supposto tacitamente nella soluzione del Problema proposto, pei quali cioè l'ombra portata dall'ovolo cade parte sulla listella, parte sul fregio e parte sul piano dell' alzato. Per delineare i contorni di queste ombre, qualunque sia per essere il caso che possa succedere, si potranno incominciare le operazioni come se dovesse aver luogo il terzo caso, quello cioè superiormente considerato nell' esposta figura; giacchè dalle operazioni necessarie per que-

sto si concepirà agevolmente non solo quale di essi effettivamente avrà luogo ma anche le poche modificazioni che si dovranno fare alla regola stessa onde avere il contorno richiesto.

PROBLEMA XXXVII.

Dato l'alzato e la pianta di una listella e di una goccia conica unite assieme come nella (Fig. 38), trovare l'ombra che accade sulla medesima, e quella portata sul piano dell'alzato.

Stabilite le direzioni LH, Lh del raggio di luce si tiri per il punto ν preso ad arbitrio nella ML la retta hH perpendicolare alla stessa ML, e segata Ln eguale ad $H\nu$ si tiri nm perpendicolare ad ML ed eguale a νh, e si unisca il punto m col punto L.

Si trovi col Prob. II la retta qd esprimente l'ombra propria della goccia.

Si segni in pianta il punto K corrispondente al punto q, si tirino le rette KV, qX paralelle alle due LH, Lh, e pel punto V la VX perpendicolare alla ML, e sarà il punto X l'ombra portata sul piano dell'alzato dal punto q. Così preso nella dq un altro punto qualunque, e nella IK marcata la sua pianta, ed eseguita l'operazione analoga alla già fatta pei due punti K, q, si otterrà un altro punto della retta Xg, indicante l'ombra portata sul piano dell'alzato dalla linea dq.

Preso un punto qualunque nell'alzato fo, ed il suo corrispondente nella pianta RN, ed operando per questi come si è fatto pei due punti K, q, si avrà un punto della retta orizzontale $abgk$, che

esprime l'ombra portata dallo spigolo della listella sul suddetto piano dell'alzato.

Si prenda la QP eguale alla distanza che passa fra la retta RN ed il centro I della pianta, e dal punto P si tiri Pu paralella ad mL, indi le due er, uc perpendicolari alla Qi, e si avrà il termine c ed un punto r dell'alzato dell'ombra, che porta la listella sulla goccia, la quale si potrà descrivere col Prob. XV, e assai più facilmente servendosi della costruzione adoperata nel Prob. XXVIII. Se dal punto g si tirerà gd paralella ad Lh si avrà in d l'altro estremo della linea crd.

Si descriva finalmente l'arco ellittico AYX ossia l'ombra che porta l'arco indicato dalla pianta AYD sul piano dell'alzato, ripetendo sempre per due punti corrispondenti presi uno in pianta e l'altro in alzato ciò che si è fatto pei due punti K, q onde avere il punto X.

Osservazione.

Se i raggi di luce avranno l'ordinaria direzione, la distanza fra le due linee $abgk, fo$ sarà eguale alla distanza delle due RN, ML; la linea ellittica crd si potrà descrivere colla regola semplicissima esposta nell'osservazione del Prob. XXVIII, ed il punto X si avrà immediatamente tirando pel punto K, ed a destra di esso l'orizzontale KX eguale alla verticale Kq: facendo per tutti i punti dell'arco circolare AYD ciò che si è detto pel punto K, si otterranno assai facilmente i punti dell'arco ellittico AYX.

PROBLEMA XXXVIII.

Trovare l'alzato dell'ombra che accade sul pezzo di cornice dorica espressa dalla (Fig. 39).

Fissate le due direzioni del raggio LH, Lh, si tiri hH perpendicolare ad ML, e presa Ln eguale ad $H\nu$ si conduca nm perpendicolare ad ML ed eguale ad $h\nu$, e si unisca il punto m col punto L.

Si tiri Bc paralella ad Lm, e dai segmenti D,a,b,c tirate delle orizzontali si avranno, col punto c le cc, ss, xx, col punto b i punti d, o, r, i, col punto a le tt, uu, e col punto D la retta EF: condotte infine le linee dt, ot, ou, ec. si avrà nella linea $ccdttouur$ ec. l' estremo dell' ombra portata dal gocciolatojo sul fregio.

Dal punto G si conduca Gq paralella a Bc, e dai punti N, P le Ng, Pg paralelle ad Lh, indi pel punto q l'orizzontale gg, e finalmente si tiri la verticale gx, e sarà $ssggx$ l' estremo dell' ombra portata sul fregio dal modiglione avente AP per alzato.

Nella pianta del triglifo conducasi la lineetta jy paralella ad HL, e dal punto y la verticale ys, che sarà l'ombra portata dal triglifo nella metopa.

Osservazione I.

Se l' angolo acuto formato dalla direzione del raggio in pianta LH colla ML sarà minore dell'angolo acuto che la fj fa colla medesima ML, si avrà un'ombra nel canaletto di ciascun triglifo, la quale si determinerà conducendo in pianta dal punto che manda ombra sulla faccia opposta una paralella ad LH, e dall' intersezione condotta una verticale segnerà questa l'ombra cercata. Quest'ombra per altro ha luogo rarissime volte per la poca profondità de' canaletti medesimi.

Osservazione II.

Se una porzione della retta gg cadesse nell' alzato dell' altro triglifo, per descrivere in tal caso le porzioni delle linee, le quali cadranno in quest' alzato, si dovrà fare per i punti p, q ciò che si è fatto superiormente per i punti a, c.

PROBLEMA XXXIX.

Trovare l'alzato dell'ombra che accade sulla base attica unita ad una porzione non rastremata del fusto della colonna (Fig. 40), nell'ipotesi che la luce abbia la direzione ordinaria.

Si trovino le linee ab, bc, de, fx, xy, yD nello stesso modo come si sono trovate nella base toscana fig. 36, le linee ab, bc, de, fg, gh, hp.

Servendosi delle medesime regole usate per segnare le linee de, yD, si avranno le linee nr, vE, la prima delle quali, cioè nr, indica l'estremo dell'ombra propria della listella inferiore, la seconda linea vE marca l'ombra propria del toro.

Mediante la costruzione indicata nel Prob. XXX si descriva la linea lkm dell'ombra portata sulla scozia da una porzione della linea yD, e colla medesima costruzione del Prob. XXX si otterrà anche la linea sv dell'ombra portata sul toro inferiore dalla stessa linea yD. Si avrà con ciò l'alzato dell'ombra richiesta.

Osservazione I.

Le ombre portate dalle rette de, ns, non sono visibili perchè cadono sugli anelli orizzontali ef; rs; anzi sul primo di questi anelli cadrà anche porzione dell'ombra portata dall'arco avente per alzato la linea Md, come si è mostrato succedere per la base toscana, e sul secondo tutta quella portata dall'arco, avente per alzato la linea nH.

Osservazione II.

La linea *lukm* che rappresenta il contorno dell' ombra che cade sulla scozia dovrebbe essere rigorosamente composta delle due parti *lu*, *km*, esprimenti le ombre portate sulla stessa scozia dal toro superiore, e da una terza linea *uk* indicante l'estremo dell'ombra portata sulla medesima scozia dalla listella superiore, e propriamente dall' arco circolare che ha *oq* per alzato; ma siccome la maggior larghezza verticale dello spazietto che bisognerebbe lasciare in luce sulla listella è poco più di un ventesimo dell' altezza della medesima listella, pertanto si potrà supporre tutto il contorno suddetto espresso dalla sola linea *lukm* portata sulla scozia dalla linea *Dγ*, essendo nei disegni ordinarj la ventesima parte dell'altezza *nr* della listella trascurabile.

PROBLEMA XL.

Trovare l' alzato dell' ombra che accade sull' archivolto indicato dalla (Fig. 41) avente per profilo *ABDEFGIC*, nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la solita direzione ordinaria.

Pel centro *C* si tiri la retta *OCm* che formi l'angolo *LCm* semiretto, e fatto centro in *n* con raggio eguale a *CI* si descriva l' arco *Hj*, che segnerà l' estremo dell' ombra portata sul muro.

Dal punto *L* preso nella retta *ML* si tiri *LH'* che formi angolo semiretto colla *ML*, ed *H'ν'* perpendicolare alla stessa *ML*, indi si seghi la parte

Lm^1 eguale ad LH^1, si tiri $m^1 n^1$ perpendicolare ad ML ed eguale a $\nu^1 H^1$, e si unisca il punto L col punto n^1.

Si conduca dal punto A la retta AB paralella ad Ln^1, e prendasi OV eguale alla distanza che ha il punto B dalla retta AK, e sarà V il punto dell'ovolo nel quale cadrà l'ombra portata dal punto O.

Fatto centro in C con un raggio maggiore di CV e minore di CO si descrivano gli archetti i, b^1, b; dal punto i si tiri $i\nu a$ paralella ad AK, e si trovi il punto r della Cn, la cui distanza dalla ML sia eguale alla $a\nu$, indi col centro r e col raggio eguale alla CO si descrivano gli archetti c^1, c in modo che seghino gli archetti b^1, b, e i punti d'intersezione saranno due punti dell'ombra portata sull'ovolo dall'arco circolare KOQ - (Se si prende la parte Cm eguale ad OV e col centro in m e col raggio CO si descriva un arco circolare, esso si approssimerà assaissimo alla linea d'ombra $SVhQ$).

Si determini tanto l'alzato NZk, quanto la pianta RTU del contorno dell'ombra propria dell'ovolo, servendosi di quanto si è detto alla fine dei Problemi VIII e XVI.

Preso un punto qualunque nella pianta RTU, o nell'alzato NZk del contorno dell'ombra propria dell'ovolo si tiri Tt perpendicolare ad ML, indi le due TX, tx, paralelle alle due LH^1, OC, e dal punto X la Xx paralella a Tt, e sarà il punto x un punto dell'estremo oxq dell'ombra che porta l'ovolo sul piano indicato in profilo dalla retta FG.

Incominciando dai termini k, U si tiri una retta Pp perpendicolare ad ML, indi le due py, PY rispettivamente paralelle alle due LH^1, OC e la Yy

perpendicolare alla stessa ML, e si otterrà in y un punto dell' ombra zk portata dalla porzione estrema dell' ombra propria dell' ovolo sul piano della listella avente per profilo DE.

Dai punti q, z si tireranno le rette qs, zu parallele ad OC; e si descriverà colla regola esposta nel Prob. XXXII la parte qg dell'ombra portata sul guscio dalla linea su: questa linea d' ombra qg è prossimamente la stessa retta che unisce i suoi termini.

Si descriva finalmente l' alzato ge dell' ombra portata sul guscio dall' arco circolare zJ colla medesima costruzione adoperata per segnare la linea SVQ.

Osservazione.

Le intersecazioni degli archetti b, c, che cadono sotto la linea ML, si ommetteranno, perchè sono affatto inutili per la descrizione della linea SVQ. essendo poi la porzione Vh perfettamente eguale alla VS, basterà descrivere la VhQ e poscia copiare la sua parte Vh nella VS; e altrettanto si dica della linea d' ombra ofq.

PROBLEMA XLI.

Data la pianta e l' alzato di una sfera (Fig. 42), trovare l' estremo dell' ombra che essa porta sul piano della pianta.

Fissate le direzioni LH, Lh del raggio di luce, si prenda nella ML la parte Lf eguale ad LH, indi

dal punto f si tiri fp perpendicolare ad ML ed eguale a vh, e si unisca il punto p col punto L.

Condotte le tangenti CT, BE paralelle alla pL, si tiri pel centro G della pianta la retta FGS paralella ad LH, e si seghino le parti GK, GS rispettivamente eguali alle parti DE, DT: divisa per metà la retta KS nel punto Q si tiri NP perpendicolare a KS, e prese le parti QN, QP eguali al raggio FG, saranno le due KS, NP gli assi della periferia ellittica $KNSP$ rappresentante il contorno cercato.

Osservazione I.

Se il punto E cadesse a destra del punto D, si prenderebbe GK a destra del G.

Osservazione II.

In un modo affatto simile si determinerà anche l'estremo dell'ombra che la sfera porterà sul piano dell' alzato.

Osservazione III.

Nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, si conduranno pei centri A, G, le rette AR, GS, che formino angoli semiretti colla ML, indi la RQ perpendicolare ad ML, e sarà Q il centro dell' ellisse da descriversi. Condotta poi FX perpendicolare ad FG ed eguale ad FI e unito il punto X col punto G sarà GX la lunghezza da darsi ai semiassi maggiori QS, QK, e la lunghezza dei semiassi minori si avrà, come sopra, prendendo le parti QN, QP eguali al raggio FG.

PROBLEMA XLII.

Trovare l'alzato dell'ombra che accade sul frontespizio (Fig.43), di cui le cornici hanno per profilo il contorno $a^1 d^1 o^1 n^1 y^1 f^1 i^1$.

Fissate le direzioni LH, Lh del raggio di luce, si tirino le AB, CD perpendicolari alle cornici, e dal punto L le LG, LF paralelle alle due BA, DC.

Per un punto qualunque ν si tiri Hh perpendicolare ad ML, indi dal punto h le hG, hF perpendicolari alle due LG, LF, e prese le parti GK, FE eguali ad $H\nu$, si uniscano i punti K, E col punto L.

Dal punto a^1 si tiri la retta a^1c^1 in modo che formi l'angolo $k^1a^1c^1$ eguale all'angolo GKL, indi si tirino la tangente d^1m^1, e la f^1h^1 paralelle ad a^1c^1, si seghino le parti AI, AN, AJ, AB eguali rispettivamente alle distanze c^1q^1, d^1r^1, m^1z^1, h^1k^1 che hanno i punti c^1, d^1, m^1, h^1 dalla retta a^1k^1, e condotte le Ii, Nn, Jj, BT paralelle alla Aa, si avranno gli estremi delle ombre che accadono sul braccio Ao del frontespizio.

Così condotta la retta a^1b^1 che faccia l' angolo $b^1a^1k^1$ eguale all'angolo LEF, si tirino la tangente c^1u^1, e le linee n^1y^1, f^1g^1 tutte paralelle alla prima linea a^1b^1, indi segate le parti Cp, Cq, Cr, Cs, CD corrispondentemente eguali alle parti b^1p^1, e^1s^1, u^1t^1, y^1z^1, g^1k^1, e condotte le linee px, qy, ru, sz, DT tutte paralelle alla Ca, e le linee ax, ny, du, kz, oT paralelle ad Lh, si avrà l'ombra che cagiona sopra se stesso l' altro braccio del frontespizio.

Mediante la regola del Prob. XXXII si descrivano i due archetti ix, ny esprimenti le ombre portate sulla gola da piccole porzioni delle rette aA, nN, e si trovi pure l' ombra uk portata sul piano della listella da una parte della linea nN conducendo la uk paralella anch' essa alla Aa e distante da questa, quanto il punto n^1 segamento delle d^1m^1, o^1u^1 lo è dalla a^1k^1: si avrà con ciò tutta l'ombra cercata.

PROBLEMA XLIII.

Trovare l'alzato dell'ombra che accade nella nicchia (Fig. 44) composta della superficie cilindrica $MBDL$ la cui pianta è il semicerchio MdL, e della volta sferica che ha per pianta lo stesso semicerchio MdL, e per alzato l' altro semicerchio BCD.

Uniti i centri a, b, si prenda bc eguale a bD, si tiri la tangente df eguale alla metà del raggio aL, si unisca il punto f col punto a, e per il punto e si conduca la eg paralella ad MB, e gl che formi l'angolo semiretto Bgl; si seghi la Dh eguale alla quarta parte del semicerchio DCB, e si avranno i tre punti h, g, c, esprimenti gli estremi dell' ombra portata dal lembo della volta nel suo interno, e sulla superficie cilindrica.

Per segnare la curva hg si prenda nell' arco lh un punto qualunque C, e condotta CF perpendicolare a bh si seghi la terza parte FE della linea CF e sarà E un punto della linea hg, come si è già detto nel Prob. XVI.

Così per delineare cg, si condurrà Nn perpendicolare ad ML, e dai punti N, n, le Nr, ns che formino gli angoli semiretti rNL, nbB, e dal segamento r la rs paralella ad MB; ed il punto s apparterà alla linea dimandata.

Osservazione.

Se i raggi di luce fossero diretti comunque, si descriverà la curva gh colla regola del Prob. XVI, e le gc, ca colla regola del Prob. XI; e se la volta superiore sarà una superficie di rotazione avente l' asse verticale si descriverà la gh col Prob. XXIII e le gc, ca col citato metodo del Prob. XI. Nel caso che la pianta MdL sia un segmento di cerchio servirà la regola del Prob. XVII.

PROBLEMA XLIV.

Descrivere il contorno dell'ombra che accade nella nicchia (Fig. 45) situata obbliquamente rapporto al piano dell' alzato, come si scorge dalla stessa figura osservandone la pianta dato ABD.

Fissate le direzioni LH, Lh del raggio di luce, si tiri per un punto qualunque ν della ML, la Hh perpendicolare alla stessa ML, indi hn perpendicolare ad Lh ed eguale ad $H\nu$, e si unisca il punto n col punto L.

Fatto centro in b col raggio bq eguale a QA si continui indefinitamente l' arco qg in t, p, e per un punto qualunque x dell' arco qgt tirata la xt paralella ad Lh, si descriva col diametro xt l' arco

$tuxz$; condotta quindi dal punto y la yz perpendicolare ad xt, si guidi la zu paralella ad Ln, e la us perpendicolare ad xt, ed il punto s apparterà al contorno cercato ef.

Tirate pei due punti A, a le rette AK, ak paralelle alle due LH, Lh, e la Kk perpendicolare ad ML si avrà la linea mk. Così presi nella AD, e nell' arco ellittico ag altri punti corrispondenti ed eseguita per questi l' operazione già fatta pei due punti A, a si avrà la rimanente porzione fk del contorno cercato.

Osservazione.

Quando il punto x si prenderà dall'altra parte del punto g, si condurrà la perpendicolare yz al disotto della xt, come nella costruzione del Prob. XX.

PROBLEMA XLV.

Trovare l'ombra corrispondente al profilo $MABL$ (Fig. 46) della nicchia considerata nel Prob. XLIII, nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano l' ordinaria direzione.

Descritte le linee Da, ad come nel Prob. XVIII si avrà il contorno dell' ombra cercata.

PROBLEMA XLVI.

Descrivere il contorno dell' ombra portata nel fondo della nicchia che ha per pianta il rettangolo $MFGK$ (Fig. 47) e per alzato la figura $MANEK$.

Si conducano le FR, AI paralelle alle due LH, Lh, e la RI perpendicolare ad ML, indi dal punto I si tiri l' orizzontale Im, e si descriva la ID perfettamente eguale ad una porzione della linea ANE, e sarà RID il contorno cercato.

Osservazione I.

Se l' arco ANE sarà circolare si condurrà dal suo centro c la cy paralella ad Lh, e dal punto C, pianta del medesimo centro, la CY paralella ad LH indi la Yy perpendicolare ad ML: fatto poi centro in y col raggio CF descritto l'arco ID, sarà questo l' ombra portata dall' arco ANE.

Osservazione II.

Nel caso che sia la profondità della nicchia la metà della sua larghezza, e l' arco ANE una semiperiferia, ed i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, basterà prendere le due Em, mI eguali alla metà della larghezza MK, unire il punto I al punto di mezzo della MK, e descrivere col centro m e col raggio mI l' arco ID, e si avrà la linea RID.

PROBLEMA XLVII.

Trovare il contorno dell' ombra che lo spaccato ordinario di un arco porta sopra se stesso, e sul piano dell'alzato.

Sia MDB (Fig. 48) la pianta, ed Mbc l' alzato dello spaccato dell' arco dato, e sieno LH, Lh le direzioni del raggio di luce.

Dell' ombra che accade sull' arco.

Preso nella ML il punto v, e condotta Hh perpendicolare alla stessa ML, si seghi Ln eguale ad Hv, si tiri nm paralella ed eguale a vh, e si unisca il punto L col punto m.

Per i punti A, p condotte le AN, pq paralelle alle due LH, Lh, indi la verticale Nq, e l'orizzontale ql, si avrà il contorno jql dell' ombra che accade sul piè-dritto.

Si segni, principiando dal punto f la curva fxa rappresentante il profilo dell' arco, si conduca la sua tangente ux paralella ad Lm, si tiri dal punto di contatto x l' orizzontale xo, ed il punto o marcherà l'estremo superiore dell'ombra che cade sulla superficie della volta dell' arco.

Preso nell'arco ax un punto qualunque y, si tiri yz paralella ad mL, indi pei punti y, z, le orizzontali yd, ze, e condotta finalmente de paralella ad Lh si avrà in e un altro punto della linea oe, e così si potrà avere tutto l'arco oe, il quale potevasi anche descrivere colla regola del Prob. XII.

Osservazione.

Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, il punto q cadrà nella retta Cj.

DELL' OMBRA PORTATA SUL PIANO DELL' ALZATO.

Condotte dai punti B, b le linee BD', bB' paralelle alle due LH, Lh, indi la $D'B'$ perpendicolare ad ML si avrà il punto B': così eseguendo pei due punti C, c quanto si è fatto pei due B, b, si otterrà il punto C', e mediante i punti K, g si avrà il punto K': col medesimo punto K combinato con k si avrà N', e i due punti F, l, daranno il punto I'. Congiungendo opportunamente i punti trovati si avranno le linee orizzontali $B'C'$, $I'N'$ e le verticali $K'N'$, $I'R$, per cui resteranno da trovarsi gli archi $C'E'$, $G'E'$.

Se dal punto e si condurrà la ed paralella ad Lh, e la dy orizzontale, si avranno gli estremi dell' alzato cd, e del profilo ya di quell' arco che porta l' ombra in $E'C'$, e così guidata dal punto e l' orizzontale ez, sarà l'arco rappresentato in alzato dalla fe ad in profilo dalla fz quello che porta la sua ombra nella EG'.

Preso nell'arco ay un punto qualunque r si conduca l'orizzontale rr', e segata nella VC la parte VD eguale ad rs', si tirino le $DT, r'T'$ paralelle alle due LH, Lh, e dal punto T guidata la TT' perpendicolare ad ML, si avrà in T' un punto dell'arco $E'C'$. Così ripetendo per varj punti dell'arco fz colla linea bFB ciò che si è detto per l'arco ay

colla retta cVC, si avranno quanti punti si vogliano dell' arco $E'G'$, e rimarrà con ciò determinato tutto il contorno dell' ombra richiesta.

Osservazione.

Nel caso frequentissimo in pratica che sia fa un arco circolare, si potrà avere immediatamente il punto e, senza descrivere la curva oe, conducendo pel centro P' dell' arco fa la retta $P'Q'$ paralella ad Lm, indi pel punto t la ts paralella ad Lh, e dal punto s l' orizzontale sQ': fatto poi centro in Q' e col raggio eguale a $P'a$ segato in z l'arco fa, e condotta ze paralella ad ML sarà e il punto cercato.

PROBLEMA XLVIII.

Dato il rettangolo $EDAM$ (Fig. 49) esprimente l' alzato dello spaccato ordinario di una volta a botte, e dato il quadrante circolare BCA esprimente l' alzato dello spaccato di una mezza volta emisferica, la quale ha il centro nel termine A dell'asse; trovare il contorno dell' ombra che accaderà nella volta composta da queste due, nell' ipotesi della direzione ordinaria dei raggi di luce.

Si conduca DF che formi l' angolo semiretto ADF, si unisca il punto B col punto C, si tirino le orizzontali HI, FG, e la corda IK paralella a BC. Fatto ciò si descrivano gli archi ellittici ac, ce precisamente colla regola dichiarata nel Prob.XVIII, e si avranno le ombre portate nello spaccato della

volta emisferica dagli archi circolari aventi per alzati Ba, BI.

Preso un punto qualunque T tra i due punti G, e, si tiri l'orizzontale TR, e poscia fatto centro in D col raggio eguale ad RT si descriva l'archetto S che sega la stessa RT, e questo segamento sarà un punto dell' arco GSe esprimente l' alzato dell' ombra portata dalla retta ED nella porzione di superficie sferica ABC.

L' ombra che accade sul rettangolo $EDAM$ si avrà come nel Prob. XII.

Osservazione I.

Si potrà ottenere lo stesso punto S descrivendo sulla HF la semiperiferia HsF, conducendo la rs perpendicolare alla HF, e segando la parte RS eguale ad rs.

Osservazione II.

Si avrà il punto a dividendo per metà l'arco BC, il punto c segando Cc eguale ad un terzo di BC; il punto G mediante la retta FG come si è già detto, ed il punto e conducendo per il punto m, preso alla terza parte della FH, l' orizzontale me a segare la linea IK.

PROBLEMA XLIX.

Dato l' alzato $MqPdb$ (Fig. 50) e la pianta $ABCDE$ di una volta a padiglione od a spicchi, e data la linea yx rappresentante una sezione fatta perpendicolarmente ad una delle rette CD, DE..., trovare il contorno dell' ombra propria tanto in alzato che in pianta.

Per un punto qualunque v preso nella ML, si tiri una retta Hh perpendicolare alla stessa ML, che incontri in H, h, le date direzioni LH, Lh del raggio di luce.

Dal punto L, ed al disotto della LH si tirino le LV, LO rispettivamente paralelle alle due ED, DC, e dal punto H si calino le rette HV, HO perpendicolari sulle rette LV, LO, indi segate le parti VR, OS eguali alla vh, si uniscano i punti R, S, col punto H.

Si conducano le rp, mt tangenti la curva yx, e che facciano gli angoli rpL, mtL ordinatamente eguali agli angoli VHR, OHS, e si abbassino le ru, mi perpendicolari alla ML.

Dai punti di contatto r, m, si tirino le nk, gf paralelle ad ML, e così si tirino le KN, FG paralelle alle due DE, DC, le cui distanze da queste sieno eguali alle xu, xi; e si avrà con ciò l'ombra cercata.

Osservazione.

Se la curva yx sarà un arco circolare avente il suo centro in T, si avranno i punti r, m assai facil-

mente, e con somma esattezza, facendo gli angoli al centro xTr, xTm ordinatamente eguali agli angoli HRV, HSO.

PROBLEMA L.

Data la pianta $ABCDE$ (Fig. 51), e l'alzato $MPXRQ$ dello spaccato ordinario di una volta a spicchi, trovare l'alzato dell'ombra portata nell'interno dal suo lembo MPX.

Per un punto qualunque K preso nella retta AE si tiri Kk perpendicolare ad ML, e pei punti K, k, le due KY, ky paralelle alle date direzioni LH, Lh del raggio di luce: si conduca dal punto y la yY perpendicolare ad ML, e si avrà un punto Y della linea $AYTS$ che si descriverà ripetendo per altri punti la costruzione eseguita pei punti K, k, come si è già fatto in casi simili.

Si conduca pel centro F la Ff paralella ad LH, e preso nella NP un punto qualunque G, si tiri Gg paralella ad Lh, e gf perpendicolare ad ML.

Dal punto f tirata la fe paralella ad FE ed eguale a $G\nu$, si descriva il poligono $fedcba$ simile al poligono $FEDCBA$, e dal punto T dove il contorno del poligono $fedcba$ taglia la curva $AYTS$ condotta la Tx perpendicolare ad ML, e la xt paralella ad Lh si avrà un punto t appartenente all'ombra cercata.

Se la linea $AYTS$ sarà descritta diligentemente i punti e, a si troveranno sempre nella curva suddetta.

Osservazione I.

Se la data cupola non fosse spaccata per metà, si dovrà fare in tal caso il poligono *fedcba* perfettamente eguale alla sezione orizzontale fatta lungo la *Zv*.

Osservazione II.

Se nella data cupola vi sarà un'apertura orizzontale, od una rottura qualunque, se ne avrà l'ombra portata nel suo interno mediante le costruzioni dei Problemi XXV e XXVI, sostituendo opportunamente dei poligoni ai circoli rappresentanti le diverse sezioni.

PROBLEMA LI.

Trovare l'alzato degli estremi delle ombre che accadono nello spaccato ordinario di una cupola (Fig. 52) coperta da una tazza emisferica aperta in cima circolarmente, ammesso che la luce abbia la direzione ordinaria.

Presa la parte *rn* eguale ad *rI*, si faccia centro nel punto *n* e col raggio eguale a *br*, si descriva un archetto, indi col centro *I* e col medesimo raggio si seghi in *Z* l'archetto descritto, si tiri *Zo* perpendicolare alla *bQ;* e segnato in pianta il punto *V* alla metà del quadrante *BR*, si tiri la verticale *Vv*, e saranno i due punti *o*, *v* i termini dell'arco ellittico *vo* esprimente l'alzato dell'estremo

dell' ombra che accade nel lucernario. Quest' arco ellittico νo si potrà descrivere colla regola del Prob. XI.

Colla regola semplicissima indicata alla fine del Prob. XVI, si trovino le linee Tl, dc esprimenti le ombre portate nell' interno della tazza dall' arco QT, e da una porzione dell' arco bk: mediante il Prob. XXV si descrivano le ombre le, ei portate dagli archi corrispondenti alle linee Qo, fH, e colla costruzione del Prob. XXIX si trovi l'ombra ic portata dalla verticale bH, e si avrà con ciò tutto il contorno dell' ombra che accade nell' interno della tazza. Questo contorno si è già trovato nel Prob. XXI per qualunque siasi direzione del raggio di luce.

Dall'estremo d si tiri dh che formi l'angolo hdC semiretto e dal medesimo punto d la dD perpendicolare ad ML. Preso quindi nell'arco hJ un punto qualunque x, si trovi il suo corrispondente F in pianta, e condotte le due xU, FE che formino gli angoli semiretti xUC, EFK, si tiri la UE perpendicolare ad ML, e si avrà un punto E della curva GD rappresentante l' ombra portata dall' arco hJ sul piano orizzontale CS. Nello stesso modo si troverà l'arco ellittico MO esprimente l' ombra portata sul medesimo piano dell' arco CJ.

Si descrivano col Prob. XIII le ombre $ty, B'A'$ portate dagli spigoli uz, pq sulle superficie cilindriche sottoposte.

Dai punti G, O si tirino le verticali Gg, OP e dai g, P le gk, PJ paralelle ad Uh; e collo stesso Prob. XIII si trovino le ombre $gu, tp, B'C'$ portate dall' arco kJ.

Servendosi sempre della medesima regola del citato Prob. XIII, si descriva l' ombra $C'D'$ portata

nella superficie cilindrica della cupola dall'arco circolare avente per pianta AO, e per alzato aP; e così pure si troverà l'ombra portata nella medesima superficie dalla sagoma am, e dallo spigolo Mm.

Osservazione.

Essendo la superficie interna della cupola una superficie di rotazione, si potrebbe descrivere tutto il contorno dell'ombra anche colla sola regola del Prob. XXV.

PROBLEMA LII.

Data la (Fig. 53) rappresentante una rampa, un ripiano, ed i corrispondenti parapetti di una scala ordinaria; trovare l'ombra che accade sopra se stessa, e sui due piani della pianta e dell'alzato.

Dell'ombra che porta uno dei parapetti sopra i due piani della pianta e dell'alzato.

Fissate le direzioni LH, Lh del raggio di luce, si tirino dai punti A, b le rette AX, bx paralelle alle due LH, Lh, e la xX perpendicolare ad ML, e si avrà nella retta AX l'ombra portata sul piano della pianta dallo spigolo verticale corrispondente al punto A; e così si troveranno tutte le ombre portate sul medesimo piano dagli spigoli corrispondenti alle rette AB, BC, CV.

Pei due punti c, C condotte le cf, Co paralelle ad Lh, LH, e la of perpendicolare ad ML si avrà

nella retta cf l'ombra portata sul piano dell'alzato dallo spigolo indicato in pianta dalla retta CV; e così si avranno tutte le ombre portate dagli altri spigoli sul medesimo piano.

Osservazione.

Volendosi le sole linee visibili si segneranno le AX, XY, YT anteriori alla linea ML per la pianta, e le cf, fT posteriori alla stessa ML per l'alzato, e quest'ultima linea fT si potrà anche avere immediatamente unendo il punto f col punto T, senza bisogno di trovare l'altro estremo z della medesima linea.

DELL'OMBRA CHE PORTA L'ALTRO PARAPETTO SUL RIPIANO E SUI GRADINI DELLA SCALA.

Si tirino le KI, EJ, OD paralelle ad LH, e le es, mg paralelle ad Lh; si conducano le Yu, zt paralelle ad ML ed eguali alla differenza delle KF, dy, ed uniscansi le uZ, tf: fatto ciò si tiri la gGD perpendicolare ad ML, la DN paralella ad uZ, e le $Nn, np^1, p^1P^1, P^1P, Pp$ rispettivamente paralelle alle OU, tf, OU, uZ, OU; si congiungano i punti N, P, n, p colle rette indefinite NPQ, npq, e si conducano successivamente le QQ^1 ec., pq^1 ec. paralelle alle due uZ, ft continuando sino ad incontrare le rette EJ, es, e si avrà la pianta e l'alzato dell'ombra portata dallo spigolo indicato dalla retta EO.

Pei segamenti s^1, s ec., si conducano le s^1S^1, sS ec. perpendicolari ad ML, sino ad incontrare la retta EJ, e si otterrà nella linea spezzata S^1S ec. la pianta

dell' ombra che porta sui gradini lo spigolo corrispondente alla KE; e l'alzato di quest'ombra sarà la stessa retta ji.

In ultimo tirate pei punti R, R^1 ec. le Rr, R^1r^1 ec. perpendicolari ad ML sino a segare la retta js, si avrà nella linea spezzata krr^1 ec. l' alzato, e nella stessa KI la pianta dell' ombra che porta sui gradini la verticale ke.

Osservazione.

Se lo spigolo corrispondente all' alzato em sarà paralello al piano della rampa della scala, come accade generalmente, le rette NPQ, npq risulteranno paralelle alle EO, em; e però in tal caso si potranno condurre immediatamente le NQ, nq, pei punti N, n paralellamente alle stesse EO, em.

PROBLEMA LIII.

Trovare gli estremi delle ombre che porta sopra se stessa la pianta di una scala a chiocciola (Fig. 54); le cui pareti sono due superficie cilindriche ordinarie.

Dell' ombra che portano gli spigoli dei gradini sui piani dei gradini immediatamente inferiori.

Fissate le direzioni LH, Lh del raggio di luce, si tiri per un punto qualunque v della ML, la Hh perpendicolare alla stessa ML, indi HN perpendicolare ad LH ed eguale ad hv, e si unisca il punto N, col punto L.

Pel centro P si conducano le PQ, Pa ordinatamente paralelle ad LH, LN, si fissi il punto a distante dalla retta PQ quant'è l'altezza di ciascun gradino, si tiri la aG perpendicolare alla stessa PQ; e supposta fB la pianta del gradino più alto, e che la scala discenda pel verso fgk, si guidino dal punto G le rette Gb, Gc, Gd, Ge ec. rispettivamente paralelle alle AB, CD, EF, ec., e saranno queste le ombre portate dagli spigoli sui gradini sottoposti.

Dell'ombra portata dalla parete sui gradini.

Si determini nella Pa un punto x avente dalla retta PQ una distanza eguale all'altezza che ha la sezione della parete sul piano del gradino più alto, e si conduca per questo la xy paralella ad aG. Prese le parti $y1$, 12, 23, 34 ec. eguali tutte alla PG, si faccia centro successivamente nei punti y, 1, 2, 3, 4, ec. e col raggio AP si descrivano gli archi f,g,k,l ec.: si provi a far centro nei punti 7, 8, ec., e col medesimo raggio a descrivere gli archetti o, p, ec.; e se questi cadranno, discendendo sempre, nella pianta degli scalini, ottavo, nono ec. rappresenteranno insieme ai primi f,g,k ec. gli estremi delle ombre portate sulla scala dalla parete esterna.

Dell'ombra portata dalla colonna della scala.

Condotte le due rette n,m tangenti alla periferia BDF e paralelle alla PQ, si provi a far centro nei punti 5, 6, ec., e col raggio PB della colonna a

descrivere gli archetti t, r, ec., osservando se attraversano ordinatamente le piante dei gradini 6, 7, ec., come si è supposto nella figura, e si avrà con ciò tutto il contorno dell' ombra cagionata dalla colonna della scala, sui gradini della medesima.

PROBLEMA LIV.

Dato l' alzato di una sfera (Fig. 55), trovare in questo la così detta botta del chiaro, e segnare quanti ellissi si vogliano i cui perimetri sieno linee uniformemente illuminate (*).

Colle date direzioni del raggio di luce si determini, come si è fatto nel Prob. IV, il contorno CED dell' ombra propria della sfera; si seghi la parte OF eguale ad EG, e sarà F il punto cercato.

Condotta pel centro O la ON perpendicolare ad OG, si prenda nell'arco NG un punto qualunque X, si tiri la XZ perpendicolare ad NO, pei punti X, Z le Xx, Zz perpendicolari ad AB; si prenda zx' eguale a zx, e le due zu, zu' eguali ad XZ, e descritta coi diametri xx', uu' Prob. III un' ellisse sarà il suo contorno una delle linee cercate. Colla

---

(*) Per *botta del chiaro* s' intende il punto, o i punti di una superficie data maggiormente illuminati, e per *linea uniformemente illuminata* s' intende una linea esposta in modo all' azione dei raggi, che tutti i suoi punti ricevino l' egual quantità di luce. Per formarsi un' idea esatta di queste linee, e del modo di descriverle sopra qualunque siasi superficie data, bisogna leggere » Sopra le Linee uniformemente illuminate. Memoria di Antonio Bordoni Professore ec. Pavia nella Stamperia Fusi e C. »

medesima regola, e variando la posizione del punto X, si sono descritte tutte le altre ellissi che si vedono nella figura considerata.

Osservazione I.

Volendosi la botta del chiaro nella superficie cilindrica della (Tav. I Fig. 1) si tiri pel centro della pianta e nella direzione paralella ad LN una retta che seghi il suo perimetro; dal punto d' intersezione e dal suo alzato, condotte due rette paralelle ai lati AB, ab indicheranno queste le linee del maggior lume.

Osservazione II.

Se sarà data la superficie conica della (Fig. 2), si condurrà pel punto dove l'asse del cono incontra il piano della pianta, una retta che passando pel punto N seghi dalla parte opposta il contorno della pianta suddetta, e unita l'intersezione col punto C, ed il suo alzato col vertice c, si avranno le linee cercate.

Tanto nella superficie cilindrica come nella superficie conica le linee uniformemente illuminate saranno rette, le prime paralelle alla direzione del lato, e le altre concorrenti tutte nel vertice del cono.

PROBLEMA LV.

Trovare nell' alzato di un toro (Fig. 56) la botta del chiaro, e quante linee si vogliano uniformemente illuminate.

Preso nel prolungamento della ML un punto qualunque o, si descriva col centro o e col raggio od eguale ad OA la circonferenza dyx; e considerata questa come l' alzato di una sfera si segnino, colla regola del Problema antecedente, la botta del chiaro f, e delle linee uniformemente illuminate.

Fatto ciò pel punto f si conduca yX paralella ad ML, e si divida la XY nei punti P, Q, F, R, S, nello stesso modo come è divisa la xy nei punti p, q, f, r, s (*): il punto F corrispondente al punto f indicherà la botta del chiaro, ed i punti P, Q, R, S, apparteranno alle linee cercate, corrispondenti a quelle che passano pei punti p, q, r, s nella supposta sfera.

Condotte in seguito altre linee come la Zt paralelle tutte ad ML, e divisa la parte ZT come la zt, si otterranno altrettanti punti delle linee cercate.

Osservazione I.

La medesima regola servirà per trovare la botta del chiaro, e quante linee si vogliano uniformemente illuminate, nell' alzato di una superficie di rotazione il cui profilo sia un arco di cerchio, avvertendo di descrivere il cerchio rappresentante la sfera col medesimo raggio che si è descritto l' arco del profilo.

(*) Per dividere la retta XY (Fig. 57) nello stesso modo come è divisa la Xy nei punti p, q, f, r, s; si collochi XY nel punto X ad angolo qualunque colla Xy, si uniscano i punti y, Y, e si tirino le sS, rR, fF, qQ, pP paralelle tutte alla yY, e resterà con ciò la XY divisa nel modo cercato.

Osservazione II.

Se nella (Fig. 7 Tav. II) si ripeterà alla sinistra della FD la curva FPG conducendovi una tangente nella direzione perpendicolare alla KE, ed in seguito si eseguirà pel punto di contatto ciò che si è fatto pel punto P onde avere i punti T, t, si otterrà la pianta e l' alzato della botta del chiaro qualunque sia il profilo FPQ.

PROBLEMA LVI.

Dato l'alzato di un toro in un archivolto circolare (Fig. 58), trovare la sua botta del chiaro, e alcune delle linee uniformemente illuminate.

Descritto col centro o, e col diametro MD un cerchio, e considerato questo come l'alzato di una sfera, si trovino col Prob. LIV la sua botta del chiaro f, e delle linee uniformemente illuminate.

Si tiri la retta ofA, si seghino le parti AP, AF, AQ ordinatamente eguali alle parti ap, af, aq, e sarà il punto F corrispondente ad f la botta del chiaro, ed i punti P, Q, due punti appartenenti ad una delle linee cercate; così condotta dal medesimo punto o qualunque altra retta oxX, e prese le parti XR, XS eguali ad xr, xs, si avranno altri due punti R, S spettanti alla stessa linea. Nell' egual modo si potranno avere quanti punti si vogliano delle linee richieste.

Osservazione.

Se l' archivolto sarà, come nella (Fig. 32), formato da archi di cerchio, la supposta sferetta dovrà descriversi successivamente nei rispettivi centri degli archi Ma, ab, operando nel resto come si è detto.

Dopo l' esposto riescirà facile il modificare le regole dei Problemi LIV, LV e LVI per la maggior parte dei casi considerati.

PROBLEMA LVII.

Data la pianta XTV (Fig. 59) e l'alzato ACB dello spaccato ordinario di una cupola sferica, segnare le varie divisioni dei cassettoni, e delle costole, in modo da poter inscrivere nei diversi quadrilateri che ne risultano altrettanti cerchi (*).

Sia KOT la pianta di una serie di cassettoni, e TOy la pianta di una costola.

Dai punti a, u, presi alla metà degli archi KT, Ty si tirino le as, uv ordinatamente perpendicolari alle OK, OT, e dal centro D condotta la DF perpendicolare ad AB ed eguale ad sa, si seghi la sua parte DE eguale ad uv. Fissata la linea superiore GH della parte senza cassettoni, si unisca il punto H col punto F, si conduca DL paralella ad FH,

(*) Non conoscendosi una regola esatta per la soluzione di questo interessantissimo Problema, ne fu dal Sig. G. Cristoforetti proposta la ricerca al Sig. Professore Bordoni dal quale ne ebbe la qui unita costruzione geometrica.

e si prenda ML eguale ad LH: similmente unito il punto M col punto E, e tirata DP paralella ad EM, si seghi PQ eguale a PM. Fatto ciò si guidino le orizzontali MN, QR e saranno queste, due delle linee occorrenti.

Nello stesso modo si segneranno le altre linee analoghe alle due MN, QR.

Osservazione.

Volendo segnare i fondi de' cassettoni si osservi, che stabilitone uno colle convenienti dimensioni, dovranno gli altri essere altrettante figure simili, per cui si faranno più o meno profondi secondo la maggiore o minore estensione che occupano.

PROBLEMA LVIII.

Conoscendosi il modulo di un disegno, trovare il modulo conveniente per eseguirne un altro simile, la cui area sia p. e. la terza parte del dato.

Sia AB (Fig. 60) il modulo del disegno dato.

Si prolunghi AB indefinitamente, si prenda BC eguale alla terza parte di AB, si descriva sopra AC il semicerchio ADC, si tiri quindi BD perpendicolare ad AC; e si avrà nella stessa BD la lunghezza del modulo cercato.

Osservazione.

Se si prenderà BC eguale ad un quarto o un quinto o ec. di AB, si avrà in corrispondenza il

modulo conveniente per un disegno quattro, cinque ec. volte più piccolo del dato.

Osservazione.

Per supplire alla mancanza del linguaggio geometrico che non si è potuto adottare nelle descrizioni dei varj Problemi, si sono invece eseguite colla massima diligenza possibile le figure; anche ad oggetto di verificare, col semplice esame delle medesime, quegli errori di lettere che potrebbero essere inavvedutamente incorsi.

FINE.

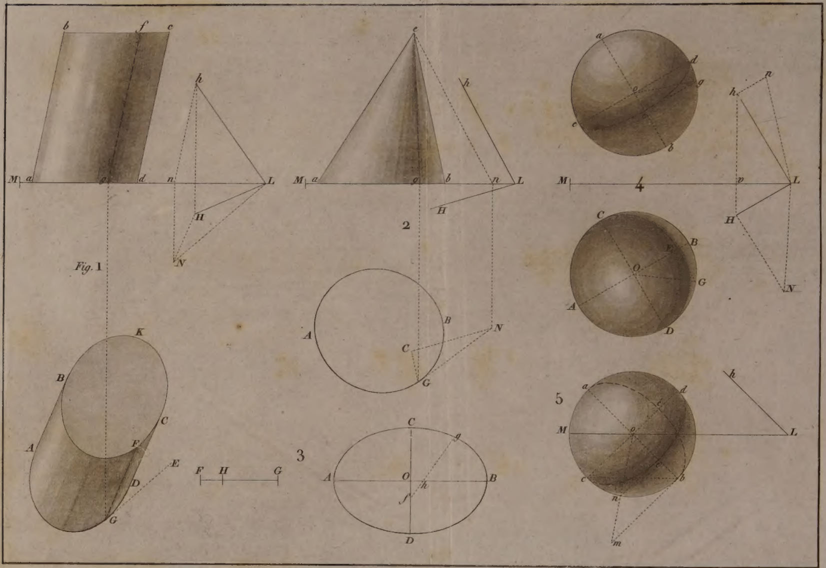
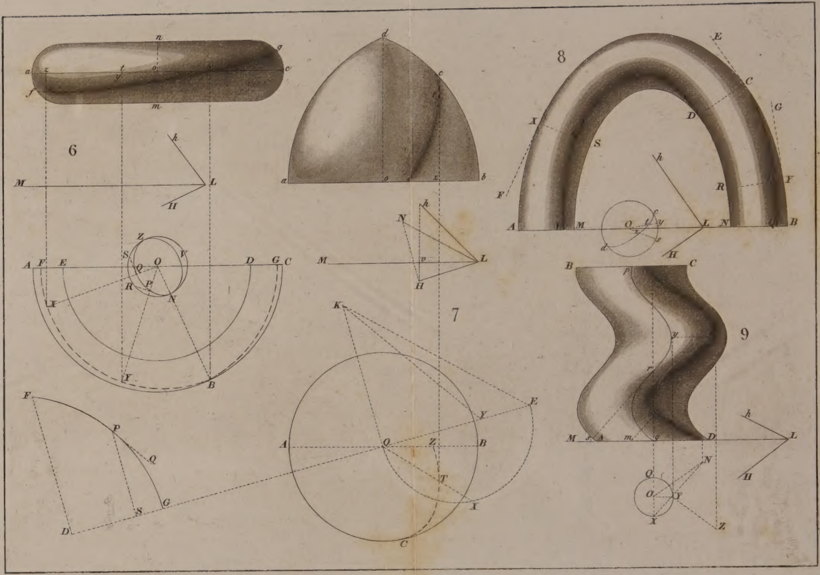
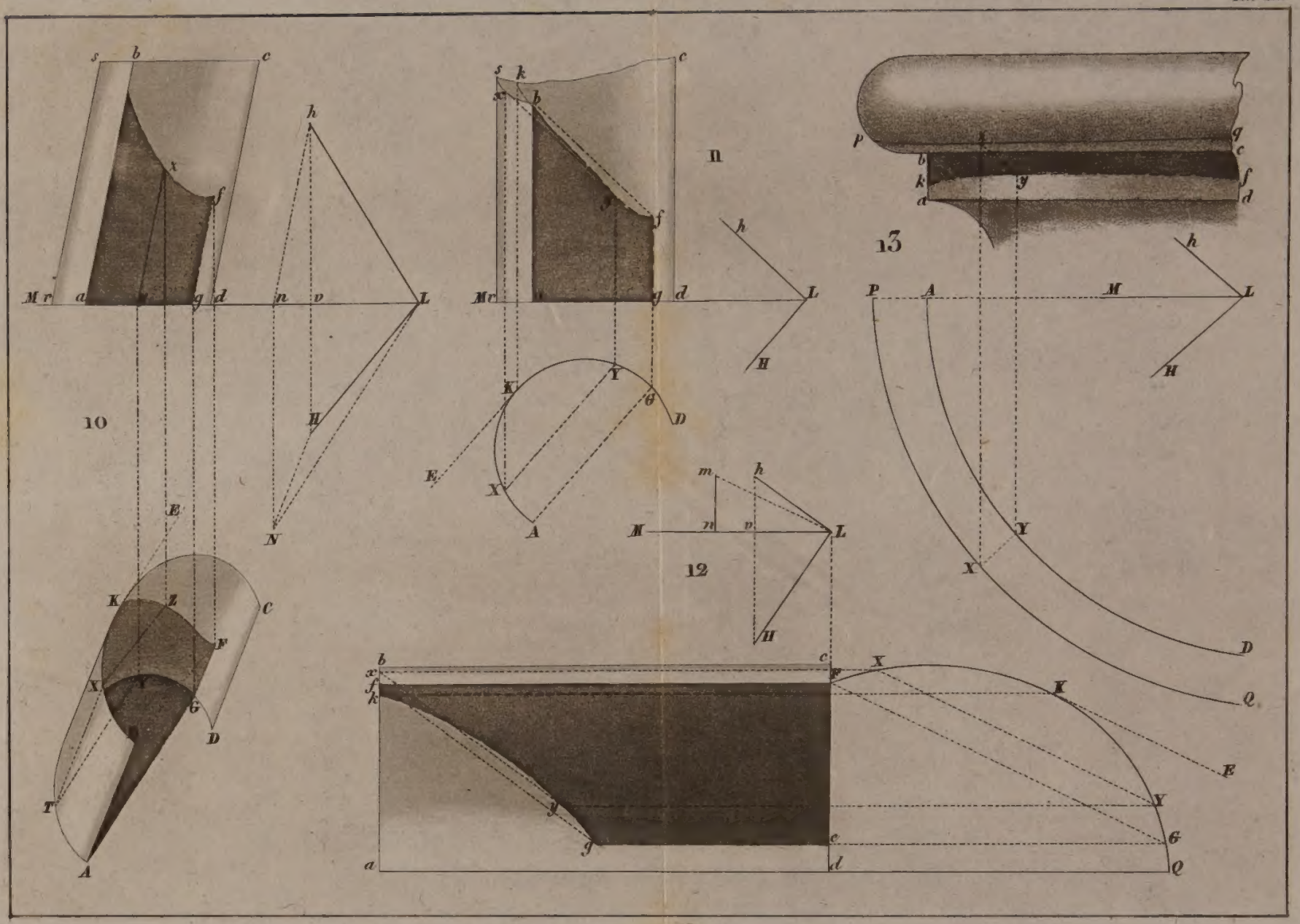
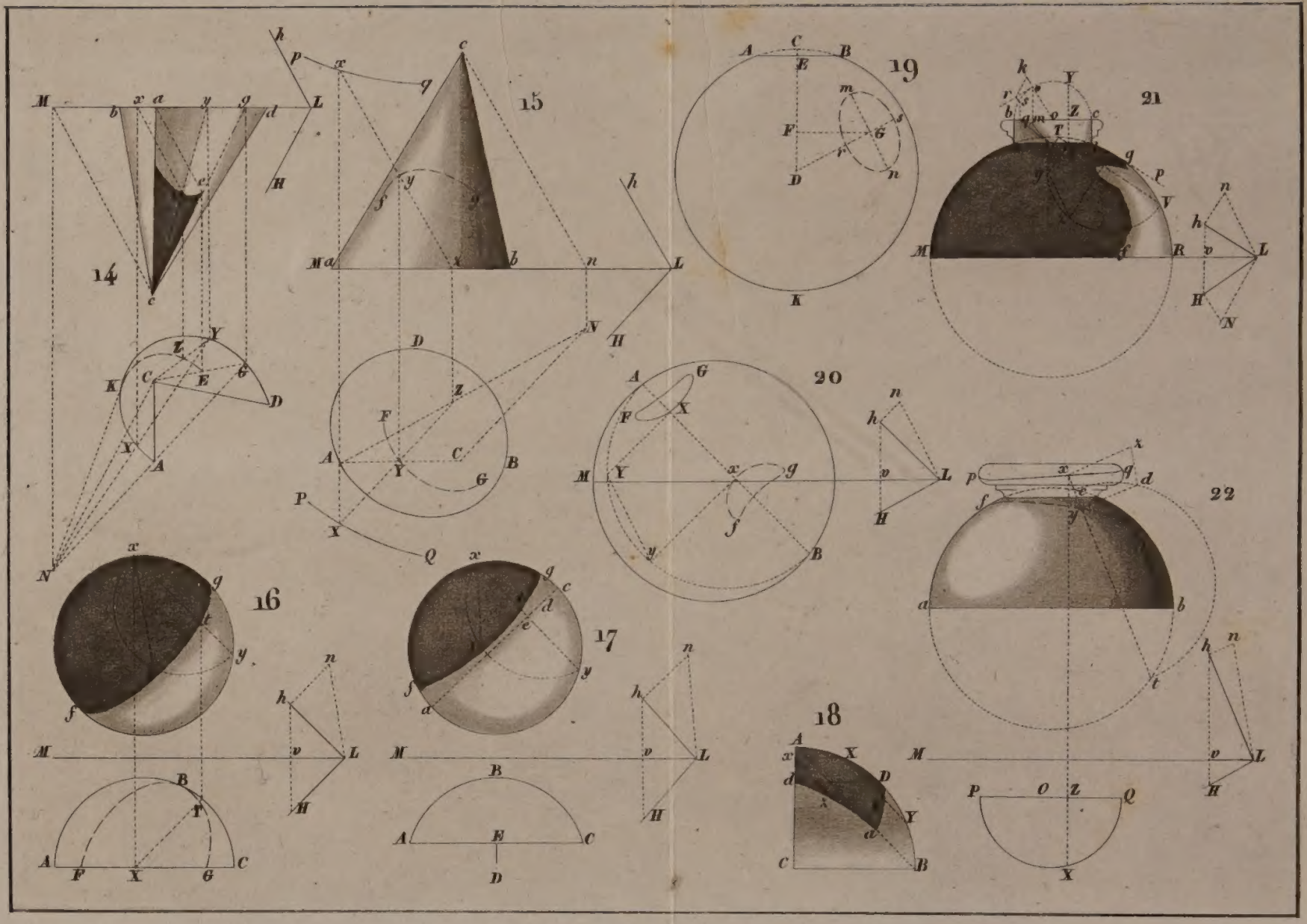
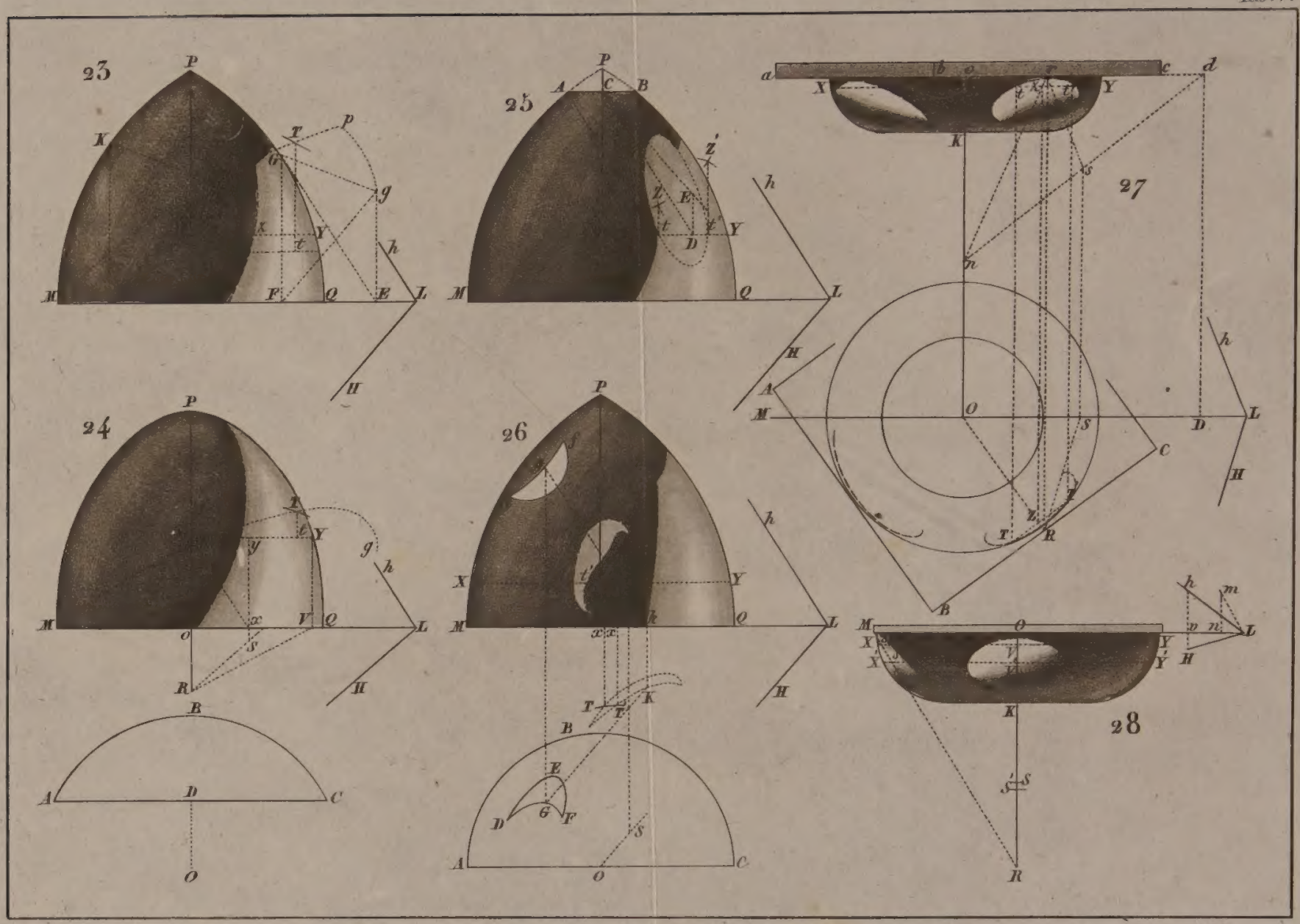


Fig. 1
2
3
4
5

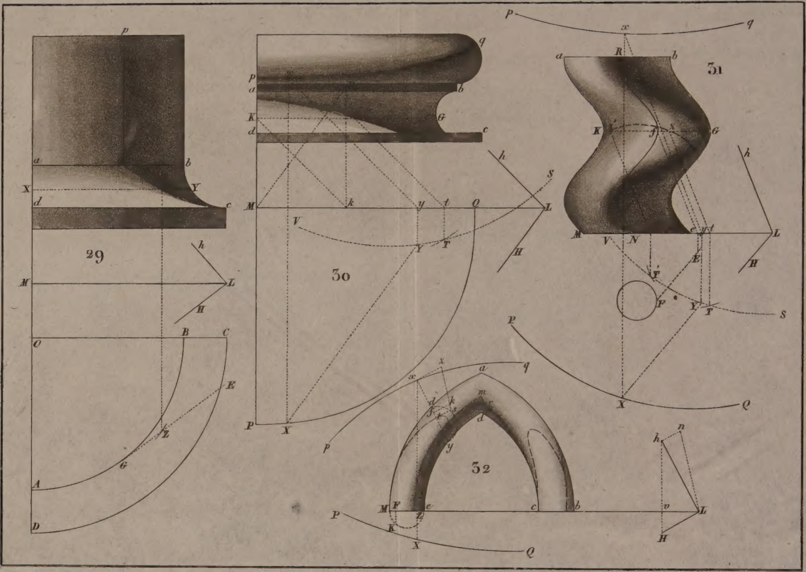

6
7
8
9

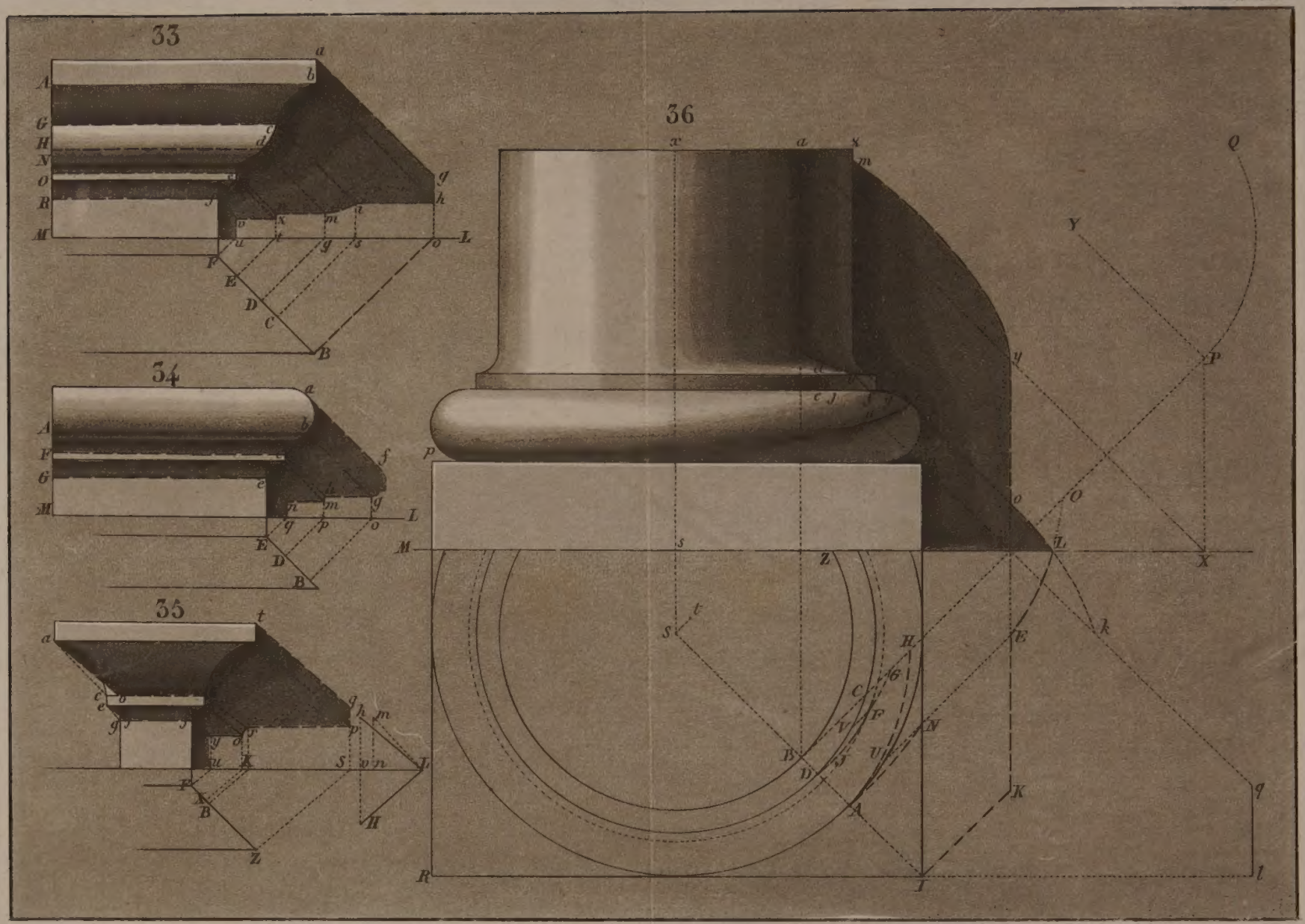

10
11
12
13

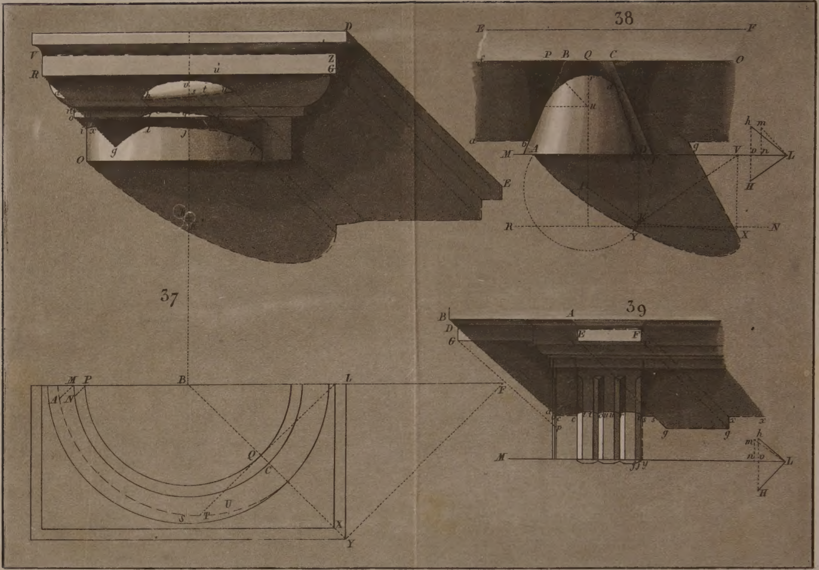

14
15
16
17
18
19
20
21
22

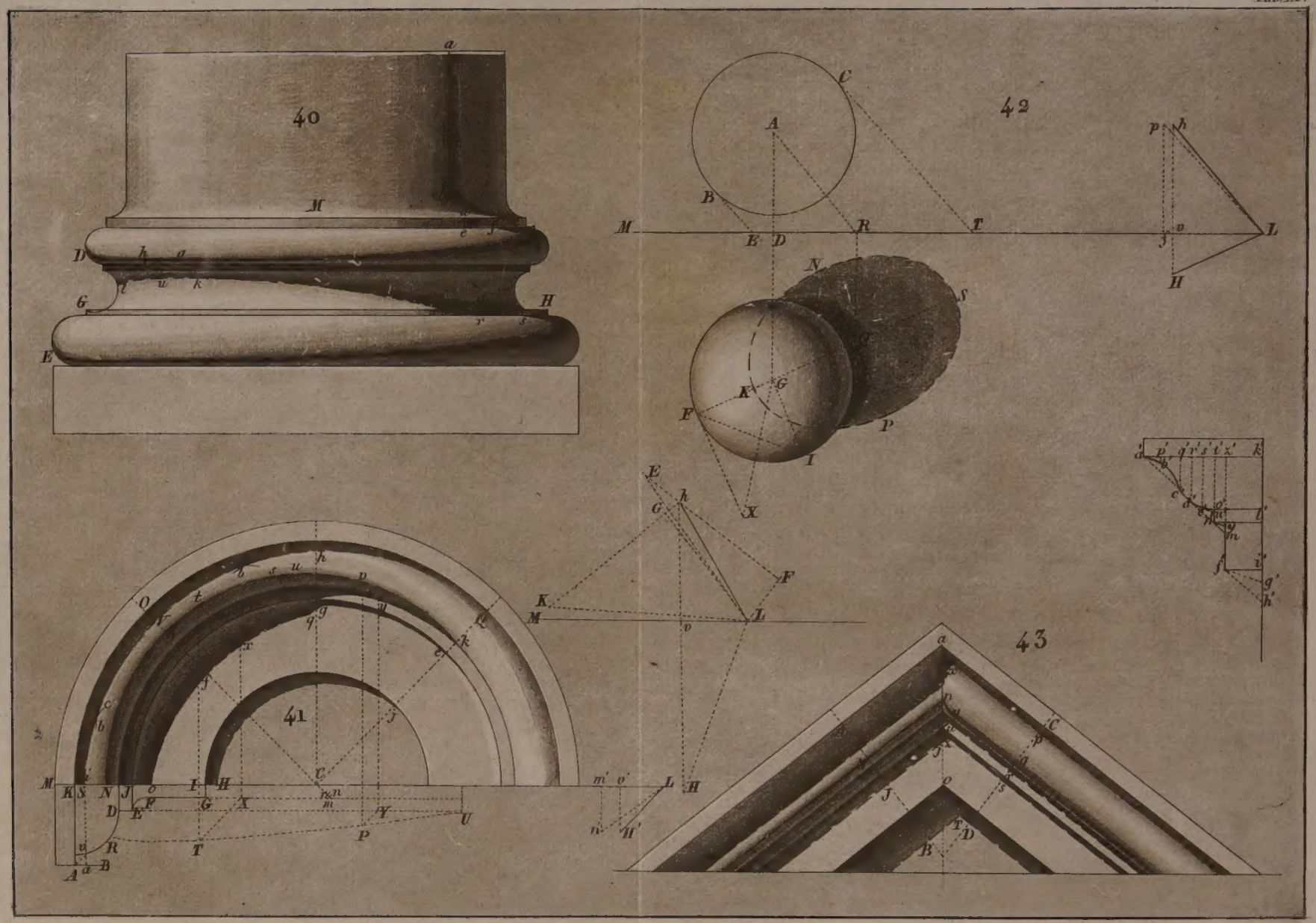

23
24
25
26
27
28

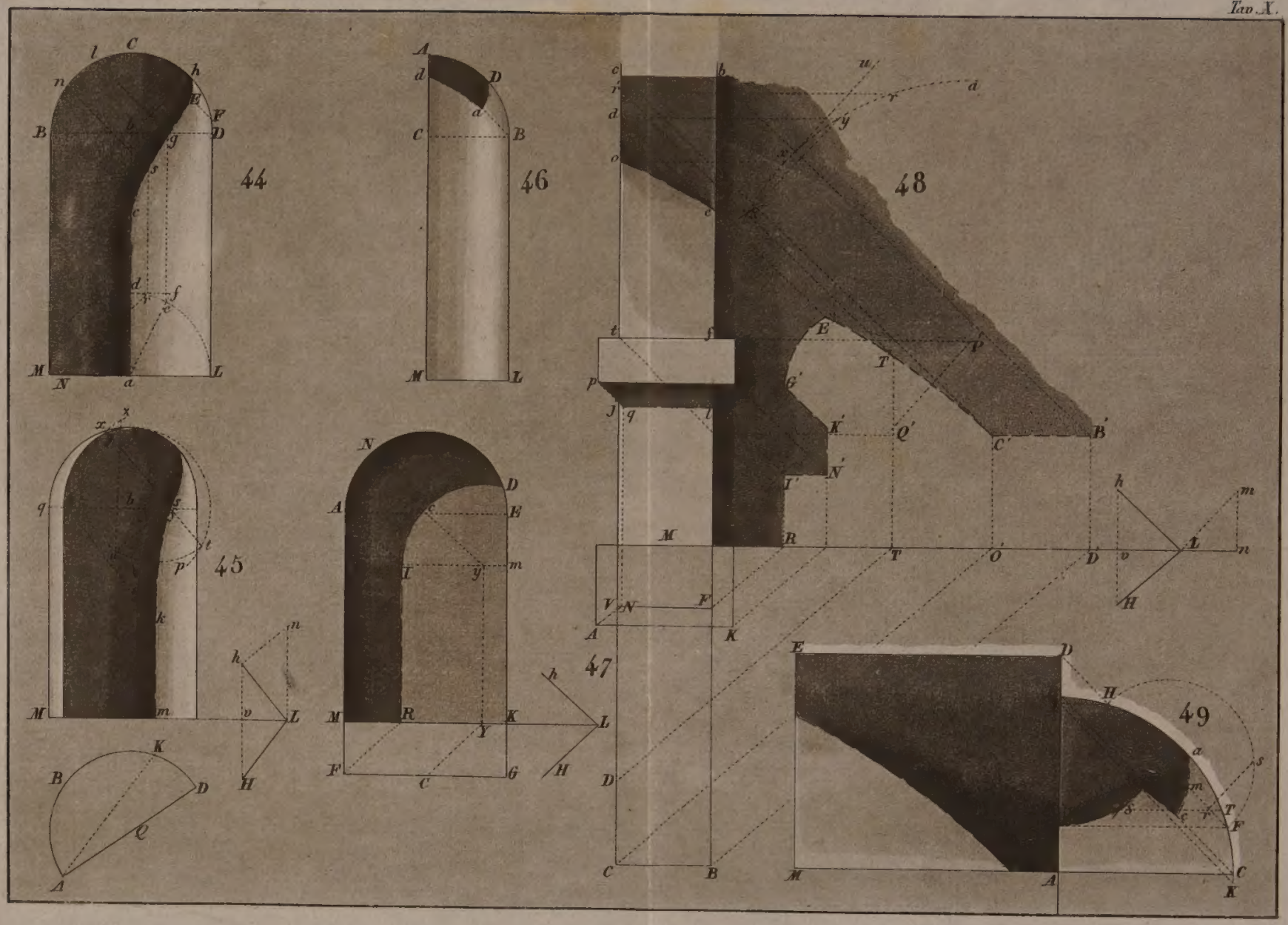
Tav. VI.

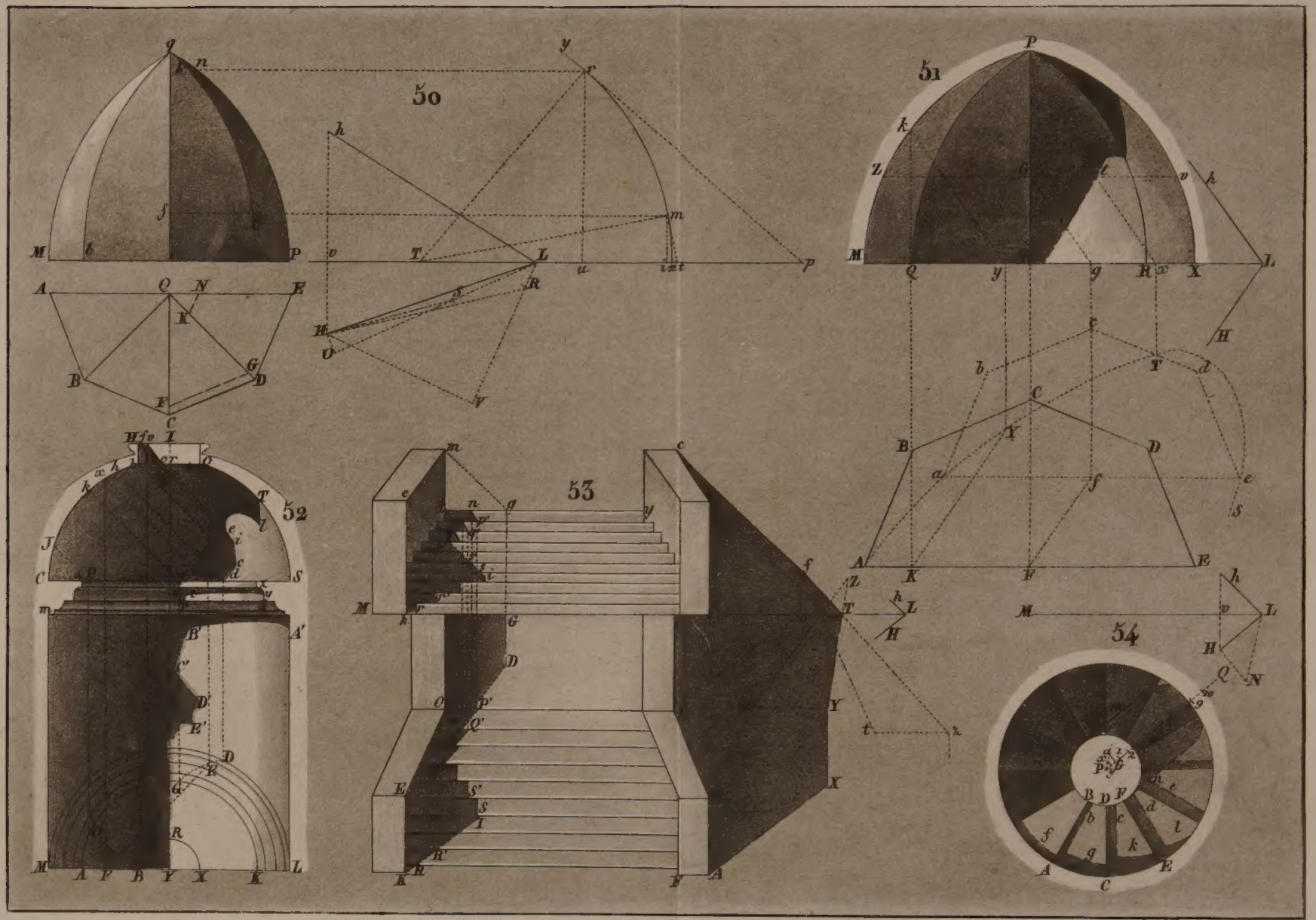


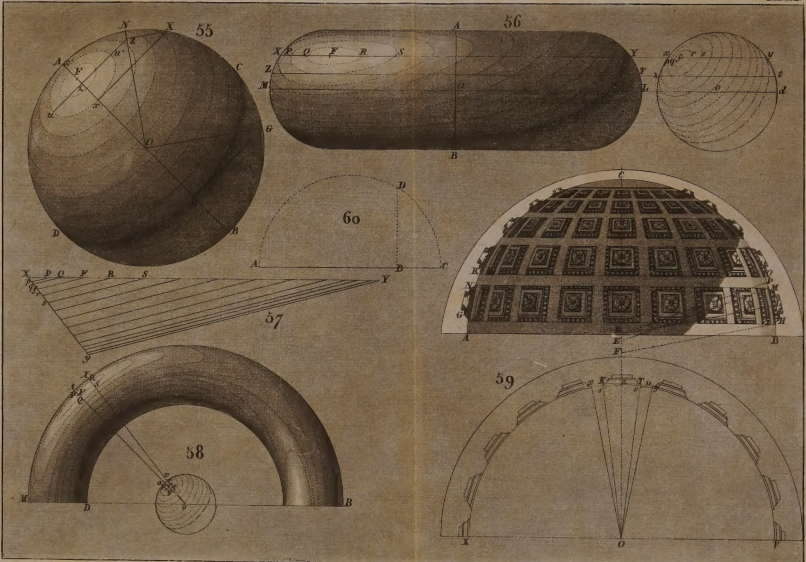

33
34
35
36


38
37
39


40
41
42
43


44
46
48
45
47
49


50
51
52
53
54


55
56
57
58
59
60

2562-620